Die Identifisering van die Elementêre Grondbegrippe in die Wiskunde[1]

Prof. D.C.J. Wessels

The identification of the basic elementary concepts in mathematics is an important subject-philosophical deepening of the analysis of the real nature of mathematics. Through thorough analysis the analogies between the arithmetical aspect, the spatial aspect, the kinematic, the physical and the biotic apsects are determined and developed. A number of anticipations and retrocipations were identified and analysed in a domain-specific way in mathematics. They are the actual or at-once infinite, environment, number of dimensions, factual size, point continuum, dimension number, imaginary number units, complex number functions, differentiation and integration. An account is also given of the theoretical divergent views on the nature and existence of each of these basic elementary concepts.

1. Inleiding

Die studie oor die identifisering en ontleding van grondbegrippe in elke vakwetenskap is vir die beoefening van daardie vakwetenskap, en so die wetenskap in die algemeen baie belangrik. Daar word drie soorte grond-begrippe in die struktuur van ’n vakwetenskap teengekom, nl. elementêre, funksie- en dingbegrippe. In hierdie artikel gaan slegs aan die elementêre grondbegrippe aandag gegee word.

Die identifisering van die grondbegrippe is ’n wysgerige opgaaf. Die wysbegeerte ondersoek o.a. die grondslae van elke wetenskap en so kom ’n vak se vakfilosofie tot stand. Die aard en struktuur van die vak, sowel as die samehang met ander vakwetenskappe, en die identifisering en

1 Hierdie artikel is gebaseer op hoofstuk 4 (pp 213-255) van die outeur se ongepubliseerde D.Ed. proefskrif: Wessels, D.C.J., 1989, ’n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool. Pretoria: Unisa.

klassifisering van daardie vak se elementêre grondbegrippe, word deur hierdie eie vakfilosofie gedoen en verklaar. Daar bestaan ’n nou verband tussen wysbegeerte, vakfilosofie en vakwetenskap. As daar dus gesoek word na die onderskeie grondbegrippe van die wiskunde, veral die elementêre grondbegrippe, is ’n grondige analise van die wiskunde noodsaaklik. Wiskunde as die studie van getal en ruimte kan soos volg omskryf word: Wiskunde is identifiserende en onderskeidende logiese objektivering van diskrete kwantiteit (getal) en kontinue uitgebreidheid (ruimte) in hul uniekheid en samehang (Wessels, 1993:3).

Die gebruik van analogieë en metafore in die beskrywing van die werklikheid is tiperend van kennisvorming. Analogieë bestaan tussen werklikheidsaspekte – ’n bestaande aspek se sinkern word deur analogieë omskryf en metafore word gebruik om entiteitsanalogieë aan te dui. Metafore, as taalvorm, word deur die mens ingespan om iets nuuts van die werklikheid bloot te lê. Die gebruik van analogieë en metafore in onderrig is ’n basiese element daarvan wat in die bepaalde konteks verhelderend en ontdekkend deurwerk na ‘verstaan’ van die inhoud. So lei dit dinamies tot die ontwikkeling van nuwe kennis onder die beoefenaars daarvan.

Die betekenis van die identifisering en analise van die grondbegrippe van ’n spesifieke vakwetenskap is van groot waarde vir die vakwetenskap. Wanneer die Reformatories-georiënteerde wetenskaplike die vier dimensies in die struktuur van die werklikheid ondersoek, naamlik die dimensies van die entiteite en modaliteite, die dimensie van die kosmiese tyd en die religieuse dimensie, en hom laat lei deur die wetmatige idee wat hieruit voortspruit, word hy gedwing om die wetmatige struktuur van die kosmos na sy uniekheid en samehang te erken. Dit lei nie alleen tot ’n groter geheelsiening in die siening van die struktuur van die bepaalde vakwetenskap nie, maar ook tot die gekonnekteerdheid en die samehang van idees, aspekte en beginsels van daardie vakwetenskap met ander vakwetenskappe. Die eenheid binne die verskeidenheid in die wetenskap word so erken. Dit werk vernuwend in op die beoefening van die wetenskap, want integrasie en gekonnekteerdheid is verhelderend vir die studente en die beoefenaars daarvan. Dit het natuurlik ook besondere implikasies vir die oriëntasie en die werk van kurrikulumsamestellers, onderwysers en dosente in die wetenskap.

Dit is dus belangrik om die elementêre grondbegrippe van die wiskunde te ondersoek. Hiervoor is deeglike kennis van die aspekte van getal en ruimte in hul uniekheid en samehang nodig. Die nodige analogieë (antesipasies en retrosipasies tussen aspekte) moet gevind word en daarvoor is die metode van komplekse analise instrumenteel.

D.F.M. Strauss het in sy lewensarbeid in die wetenskap diep spore getrap in die bestudering en oopdek van die vakfilosofie van die wiskunde. Sy insig in die modale verskeidenheid en eenheid van die geskape werklikheid, sy sterk beoefening van die samehang tussen wysbegeerte en vakwetenskap en sy gehoorsaamheid aan die wetmatige struktuur van die kosmos wat die uniekheid en samehang tussen wet en feit erken, het sy bydraes in die ondersoek na die grondprobleme in die wiskunde omvangryk en waardevol gemaak. Hierdie studie oor die indentifisering van die elementêre grondbegrippe van die wiskunde kon plaasvind, omdat sy werke daar was om bestudeer te word.

Strauss se konstante navorsingsfokus in hierdie veld het oor die jare (sedert 1969) gelei tot 'n lang reeks publikasies deur hom. Veral in 2001 tot 2005 (vgl. die Bibliografie) het die grondbegrippe in die wiskunde groter aandag gekry en het dit besondere verdere diepgang verleen aan die verheldering van hierdie probleem-areas in die wiskunde.

2. Die metode van komplekse analise

Die getalsaspek is in die sin anders as die ander aspekte van die werklikheid, naamlik dat die getalsaspek geen vroeëre aspek as fundering het nie – dit is dus die mees funderende aspek van almal. Dit is ook die eerste en daarom die mins gekompliseerde aspek. Die metode van komplekse analise word spesifiek by die analise van die getals- en ruimte-aspekte benodig wanneer gepoog word om die elementêre grondbegrippe van die wiskunde in sig te kry.

Die sinkern van die getalsaspek, naamlik diskrete kwantiteit, veronderstel nie ander aspekte en hul struktuurelemente nie. 'n Bepaalde sinkern van 'n aspek kan egter alleen ontleed word indien van ander terme uit ander aspekte gebruik gemaak word. Dit beteken dat alleen met grondbegrippe wat op ander aspekte appelleer die elementêre grondbegrippe van byvoorbeeld die getalsaspek gevind en ontleed kan word. Die modale sin van getal veronderstel nie die sin van ander aspekte nie, maar die wetenskaplike analise van die sin van die getalsaspek (dit is die metode van komplekse analise) veronderstel dat die toegangspoorte van die ander aspekte gebruik word (vgl. Strauss, 1988a: 116).

Die ontsluiting van die getalsaspek is volledig afhanklik van die analitiese omgang met die getalsaspek. Die analise van die getals- en ruimte-aspekte is ook volledig afhanklik van byvoorbeeld die oorspronklike fisiese en kinematiese terme in die begripsvorming van die wiskundige logika. In die wiskundige logika word byvoorbeeld van konstantes en veranderlikes gebruik gemaak, terwyl konstansie oorspronklik ’n kinematiese term is en verandering ’n fisiese term.

As daar gepoog gaan word om die getal 3 wat ’n subjek aan die feitlike sy van die getalsaspek is, te analiseer (dit is uiteraard ’n deel van die analise van die getalsaspek), sal soos volg te werk gegaan word: die getal 3 word ondersoek en as ’n numeriese identiteit verklaar. Numeries, omdat dit die getalsaspek is, en identiteit omdat identiteit die intuïsie van die kinematiese aspek aandui (dit dui op duursaamheid of konstansie). Nou is daar ’n plek aan die getal 3 binne die sisteem van natuurlike getalle, toegeken. Daar bestaan ’n samehang tussen hierdie en die ander getalle. Let op dat samehang ’n ruimtelike term is. Die getal 3 beskik nie hier oor ruimtelike uitgebreidheid nie – samehang (uit die ruimte) word hier gebruik om iets van die getalsubjek (en ook ruimte-objek), te sê. Terme uit die kinematiese en ruimte-aspekte is nou gebruik om die getalsaspek te analiseer. Belangrik dus: Die getal 3 kan alleenlik analiseer word deur die toegangspoorte van ander aspekte.

Daar word dus nou oor getal en ruimte op ’n baie sinryker wyse gepraat as wanneer alles beperk was tot getal en ruimte. Die analise van die kinematiese aspek vind op ’n soortgelyke wyse plaas (vgl. Strauss, 1978: 118). Die eerste drie natuuraspekte (getal, ruimte en kinematiese) verskil dus duidelik van die ander aspekte. Antesipasies van alle aspekte werk altyd ontsluitend en verdiepend en wanneer daar gepoog word om die natuursye te ontsluit, geskied dit altyd op die basis van hierdie kompleks-bemiddelde situasie want hierdie vroeëre aspekte is as’t ware aangewese op die latere aspekte. Hierdie unieke eienskap van die eerste drie aspekte is ook so omdat nie een van hulle ’n entiteitspesifikasie het nie, of entiteitsgekwalifiseerd is nie.

Verder is daar by die ontsluiting van hierdie drie aspekte ’n besliste afhanklikheid van die ontsluiting van die logiese aspek. Alleen onder leiding van die denkbeweging van die verdiepte logiese denke gebeur dit dat byvoorbeeld die sin van getal in sy antesiperende samehange blootgelê word.

Hierdie verklaring van die komplekse analise van die eerste drie natuursye is in lyn met die denktradisie in die Westerse filosofiegeskiedenis. Hierin is die intuïsie van aspekte en entiteite vasgelê. Die lynregte verbinding van die eerste drie natuursye met die na-psigiese aspekte oefen geen intuïtiewe appèl op die ondersoeker uit nie en kan dus geïgnoreer word. Slegs deur middel van die komplekse analise word dit moontlik. Dit is egter anders by fisiese dinge want daar is fisiese subjekfunksies wat bioties-ontslote of -gerig is sonder die mens se tussenkoms, byvoorbeeld die biotiese sel.

2.1 Getals- en ruimte-analogieë

By hierdie analogieë moet altyd in gedagte gehou word dat die kompleks-bemiddelde situasie, soos hierbo uiteengesit, van toepassing is en dat daar nie analogieë in die gewone sin aangetref en verreken word nie. ’n Modale analogie verwys dus altyd vanuit een aspek na ’n ander aspek waar hierdie analogie oorspronklik voorkom en dus so verbandhoudend met die unieke eie aard van die betrokke aspek is. Gewone analogieë is soos regsgevoel en gevoelsreg wat deur Strauss as voorbeelde aangetoon word (vgl. Strauss, 1978: 24, 25). Regsgevoel is ’n juridiese term met ’n sensitief-psigiese komponent by. Dit is dus ’n psigiese analogie in die juridiese aspek en só ’n analogiese verwysing vanuit die juridiese aspek na die psigiese aspek (dis daar waar ‘gevoel’ oorspronklik is). As daar na gevoelsreg gekyk word, dan is dit ’n juridiese analogie in die psigiese aspek (‘reg’ is hier oorspronklik). So is lewenskrag ’n fisiese analogie in die biotiese aspek.

2.2 Getalsantesipasies na latere natuursye

Omdat die getalsaspek die eerste en ook die mins-gekompliseerde aspek van die 15 werklikheidsaspekte is, is daar slegs antesipasies moontlik en geen retrosipasies nie. Die volgorde van die aspekte is getal, ruimte, kinematiese, fisiese, biotiese en psigiese.

Getal	**Ruimte**	Opeens-oneindige Omgewing Hoeveelheid dimensies Feitlike grootte Puntkontinuum Dimensiegetal
	Kinematiese	Imaginêre getalseenhede Komplekse getalfunksies
	Biotiese	Differensiasie Integrasie

2.1.3 Ruimtelike retro- en antesipasies

Die ruimte-aspek het egter retro- en antesipasies na vroeëre en latere aspekte onderskeidelik.

	Ruimte Getal	Geheel/ dele-relasie Totaliteit Oneindig-verdere verdeelbaarheid
	Fisiese	Kontinuïteit (Fisiese ruimte)

3. Elementêre grondbegrippe en wiskunde

Die identifisering en beheersing van die elementêre (universele, strukturele) grondbegrippe van die wiskunde, stel die mens in staat om toegang te verkry tot die belangrike veld van (geïntegreerde) wiskundekennis. Hierdie moontlikheid open dan ook die geleenthede vir die mens tot geïntegreerde natuurwetenskaplike kennis. Voordat dus oorgegaan kan word om die belangrike invloed van grondbegrippe op die onderwys van die natuurwetenskaplike vakke op skool aan te dui, moet hulle eers binne die wysgerige sowel as die vakwetenskaplike veld geïdentifiseer word.

Daar word nou gekyk na watter elementêre grondbegrippe in die wysbegeerte bestaan wat geplaas kan word binne die veld van die wiskunde. Hierdie strukturele grondbegrippe maak die bestaan van die ander funksie- en dingbegrippe wat in vakwetenskappe, sillabusse en handboeke gevind word, moontlik, en staan in wysgerige taal bekend as funksiebegrippe/ relasiebegrippe en analogieë, dit is retrosipasies en antesipasies. Hierdie analogieë tussen die eerste vyf natuuraspekte se sinkerne, wat betrekking op die wiskunde het, gaan wysgerig aangedui word om so ook hulle vakwetenskaplike posisie bloot te lê. Daarna kan die funksie- en dingbegrippe nagevors word.

Elk van hierdie elementêre grondbegrippe is al deur verskillende denkskole in die wetenskap ondersoek, waarop verskillende visies en perspektiewe daaroor nagehou is. Elke wiskundige, wiskunde-vakdidaktikus en wiskunde-onderwyser maak op die een of ander wyse van hierdie elementêre grondbegrippe gebruik. Hierdie teoretiese divergensies sal deur kruisevaluering blootgelê word en so aan die man gebring word.

Elke vakwetenskaplike en vakdidaktikus behoort te weet watter begrippe onvermydelik in die begrippe-arsenaal van elke onderhawige natuurwetenskap tuishoort. Bykomend behoort hulle ook te weet in watter sin hierdie grondbegrippe gebruik word. Die doel hiervan sou wees om te voorkom dat reduksionismes en grensoorskrydings insluip in die beoefening van die wetenskappe. Dit is dan ook niks anders as hierdie teoretiese divergensies wat veroorsaak dat die onderwys van hierdie vakke vanuit 'n ontsluitende en integrale perspektief gegee kan word nie.

'n Poging word vervolgens aangewend om al die analogieë en funksie- en dingbegrippe te identifiseer en dit dan aan die hand van bogenoemde skema uiteen te sit. Die werklikheidsaspekte wat onder die loep geneem gaan word, is dié van getal en ruimte.

4. Bespreking van kruissnydende analogieë

Die unieke aard van hierdie analogieë vereis ook hier ’n aanpassing in die ‘logiese’ orde waarvolgens hierdie analogieë bespreek moet word. Die vraag ontstaan onwillekeurig watter van hierdie analogieë die mees grondliggende is. Die antwoord is dié van die opeens-oneindige (met totaliteit daarby), die geheel/ dele-relasie, en die oneindig-verdere, verdeelbaarheid. Daarom sal hierdie retrosipasies van die ruimte-aspek eers bespreek word – dit sal ook makliker die weg vir die getalsanalogieë aandui om bespreek te word.

4.1 Die geheel/ dele-relasie

Die idee van ’n geheel met sy dele behoort integraal tot die oorspronklike aard van die ruimte-aspek. Die oorspronklike sin van hierdie geheel/ delerelasie verwys dan ook na die gebied waar hierdie relasie die eerste keer te voorskyn kom. Strauss (1988a: 129, 130) dui ondubbelsinnig aan dat daardie gebied nie die getals- of biotiese aspekte is nie, maar dié van die ruimte. Hy sê hiervan:

> Slegs wanneer daar inderdaad sprake is van ’n gemeenskaplike grens kan daar ook gepraat word van samehang (kontinuïteit) en van ’n gekonnekteerde geheel (totaliteit). Hierdie soort kontinue samehang is eie aan die ruimtelike uitgebreidheid ...

Getalle daarenteen beskik as afsonderlike eenhede nie oor ’n gemeenskaplike grens nie.

Binne die ruimte-aspek is die sinkern (samehang of kontinuïteit) se betekenis so dat enige kontinuum uit gekonnekteerde dele bestaan. Dit is dele wat weer uit ander dele bestaan – dele wat elk weer uit verdere dele bestaan. Die relasie tussen die geheel en sy dele is oorspronklik in die ruimteaspek. Enige verwysing na die totaliteit of geheel is dus gedoen vanuit die toegangspoort van die ruimte, of veronderstel die sin van ruimtelike uitgebreidheid. Dit is juis hierdie kenmerkende geheel/ delerelasie van ruimtelike kontinuïteit wat volgens Paul Bernays volledig in die weg staan van elke poging om ruimte volledig te aritmetiseer (te herlei tot getal) (Strauss, 1978: 14, 15).

4.2 Oneindig-verdere verdeelbaarheid

Onweerlegbaar is die feit dat, omdat die ruimtelike kontinuïteit samehangend is, die ruimte ook oneindig verder verdeelbaar is. Dit kom voor aan die feitlike sy van die ruimteaspek as ’n retrosipasie na die wetsy van die getalsaspek. Die retrosipasie dui op die orde van opeenvolging want wie sonder einde wil verdeel, moet dit suksessief doen. Strauss (1978: 14) beskryf hierdie eienskap soos volg:

> Hierdie eienskap van kontinuïteit weerspieël nie alleen regstreeks die getalsbasis van ruimtelike uitgebreidheid nie (oneindigheid berus in sy oorspronklike getalsin op die aritmetiese orde van opeenvolging: een en nog een en nog een en nog een, ... sonder einde), maar keer die oneindige na binne.

So neem 'n opeenvolgende getallery oor alle eindige grense toe terwyl die voortgaande verdeling van 'n kontinuum benede alle grense in kleinheid toeneem. Op hierdie wyse word die oneindige na binne gekeer (Strauss, 1986: 11).

Die oneindige verdere verdeelbaarheid en die geheel/ dele-relasie hang onafskeidbaar saam. Elke deel van 'n ruimtelike kontinuum hang saam met elke ander deel en dit is presies die basis van waaruit die oneindige verdere verdeelbaarheid van ruimtelike kontinuïteit voortvloei. Dit is dus ruimtelike kontinuïteit wat albei begrond en fundeer.

Dit is belangrik om hier te meld dat fisiese ruimte, fisiese gebeure en materie nie kontinu is nie. Strauss (1988a: 130) wys daarop dat Hilbert dit reeds in 1925 in sy gedenklesing ter ere van Weierstrass duidelik aangetoon het dat daar steeds grense bestaan vir die voortgesette verdeelbaarheid van die materie en word die uitspraak nog steeds gehandhaaf dat die natuur 'spronge' maak. Die oorspronklike sin van die ruimte is dus kontinu en oneindig verder verdeelbaar, maar die fisiese ruimte is diskontinu en eindig. Die aard van ruimtelike uitgebreidheid is anders as die aard van fisiese uitgebreidheid.

4.3 Die Opeens-oneindige (en totaliteit)

4.3.1 Totaliteit

Dit was Paul Bernays (1964: 284) wat verklaar het dat daar 'n dualiteit tussen rekenkunde en meetkunde bestaan. Hy stel die probleem soos volg:

> The concept of number appears in arithmetic. It is of intuitive origin, but then the idea of the totality of numbers is superimposed. On the other hand, in geometry the platonistic idea of space is primordial.

Bernays, as Intuïsionis, het soos alle groot wiskundiges 'n saak probeer uitmaak oor die uniekheid van en samehang tussen die getals- en ruimte-aspekte – tussen afgeslote en onderskeie afsonderlikheid en kontinue uitgebreidheid. Hy beklemtoon hier die probleem wat ontstaan binne die getalsaspek as die idee van die totaliteit van die getalle(-stelsels) ingevoer word. Hierdie totaliteit wat 'n getalsantesipasie vanaf die feitlike sy van die getalsaspek na die orde van opeens in die ruimte-aspek (wetsy) is, was nog altyd verantwoordelik vir die verleiding van wiskundiges om dit sonder meer te verklaar as kontinuïteit. Daarmee word die brug op eg reduksionistiese wyse aritmetisisties tussen die getals- en ruimte-aspek deur middel van 'n 'kontinue oorgang' 'geslaan' waarvolgens kontinuïteit uit getal opgebou word.

Dit was veral Richard Dedekind en Georg Cantor wat vanuit die intuïsionisme die hantering van die getallestelsels en versamelingsleer sterk aritmetisisties gekleur het. Strauss (1988a: 124) verwys na Dedekind wat uitdruklik verklaar dat wanneer die irrasionale getalle by die rasionale getalle gevoeg word "die gebied van die getalle dieselfde volledigheid of, soos ons eweseer kan sê, dieselfde kontinuïteit verkry as die reguit lyn." Cantor, wat die grondlegger van die versamelingsleer is, stel dit dat hy 'n suiwer aritmetiese begrip hanteer wanneer hy praat van 'n punt-kontinuum.

Dit is die geheel-/ dele-relasie wat onherroeplik tot die ruimte-aspek behoort, wat in die uitsprake van Dedekind en Cantor figureer. Die begrippe geheel, samehang en totaliteit word hiermee in verband gebring, want dit appelleer onweerlegbaar op die onherleibare sin van die ruimte-aspek. Hiervan sê Strauss:

> Beide Dedekind en Cantor se skynbaar suiwer aritmetiese definisies hanteer die idee van getalversamelings as oneindige totaliteite, wat juis impliseer dat die eie aard van die ruimte-aspek benodig word in die poging om ruimte tot getal te herlei – 'n klinkklare sirkelredenasie!

Hy verwys dan ook na Paul Bernays (1976: 74, 188) wat ten opsigte van die totaliteitskarakter van kontinuïteit sê dat dit "... undeniably belongs to the geometric idea of the continuum which would resist perfect aritmetization."

Dit is belangrik om daarop te let dat Weyl en die ander intuïsioniste hul vertrekpunt in hierdie ruimtelike geheel/ dele-relasie neem sonder dat hulle origens bereid is om die ruimtelike aard daarvan te honoreer. Weyl wys wel die aritmetiserende monisme af en beklemtoon dat die oorspronklike idee van kontinuïteit nie suiwer uit ons getalvoorstellinge voortvloei nie. Daar ontbreek by Weyl 'n besef van die onverbreeklike korrelasie tussen die ruimtelike orde van opeens en die ruimtelike geheel/ dele-relasie. Die intuïsioniste aanvaar die opeens-oneindige ten volle, maar verwerp die suksessief-oneindige gedeeltelik, omdat hulle met 'n onontslote getalsin werk. Hulle herlei in werklikheid die ruimte-aspek na die semi-ontslote getalsin (vgl. Wessels, 1982: 94, 95).

4.3.2 Die Opeens- en die Suksessief-oneindige

Daar word binne die wiskunde met twee soorte begrippe van oneindighede gewerk: die een is die Opeens-oneindige (OO) wat ook bekend staan as die Aktueel-oneindige of die Voltooid-oneindige. Die ander een is die Suksessief-oneindige (SO) of Potensieel-oneindige of Onvoltooid-oneindige. Die OO word gesien as 'n grootheid wat in al sy dele vas en bepaald is alhoewel dit terselfdertyd elke eindige grootte oortref. Dit is hoofsaaklik Cantor se vertolking (Hilbert, 1925: 139; Strauss, s.j. WYS III: 1, 5, 6). Daarenteen wys die SO in 'n duidelike teenstelling na die oneindige wat letterlik oneindig, dus sonder einde, is (vgl. Bernays, 1964: 278). Strauss (1986: 2) beskryf die SO as "... (it) was traditionally conceived of as the possibility to extend any given sequence of numbers endlessly ..."

Wanneer na die OO gekyk word soos wat Cantor dit hanteer in die bewys van die ooraftelbaarheid van die reële getalle, dit wil sê die bekende diagonaalbewys en wat so dien as die grondlegging van die versamelingsleer, blyk dit dat die OO verstaan kan word as 'n kwantum wat enersyds nie veranderlik is nie (maar veeleer in al sy dele vas en bepaald is), maar andersyds ook 'n regte konstante is wat tegelykertyd enige grootte van dieselfde aard in grootte oortref. Die geaardheid van die OO as 'n konstante blyk dus duidelik. Daarenteen word die SO se geaardheid opgevat as die van 'n veranderlike, want die SO is daardie aanduiding waar 'n onbepaalde veranderlike eindige grootte voorkom, wat of oor alle eindige grense heen in grootte, of benede alle grense in kleinheid toeneem (Cantor, 1932: 401 in Strauss s.j. WYS III: 5).

Die OO is deur Weierstrass gebruik om o.a. $\sqrt{2}$ te definieer. Hy het die irrasionale getal $\sqrt{2}$ in terme van 'n ry rasionale getalle 1; 1,4; 1,41; 1,414;... beskryf. Strauss (s.j. WYS III: 4) beklemtoon dit dat die OO-eienskap hierin na vore kom dat die mens 'n oneindige getal (soos $\sqrt{2}$) nie anders as deur die voltooidheid in die tyd kan bedink nie – die oneindige hoeveelheid syfers bestaan almal tegelyk. Teen dieselfde agtergrond het Cantor die versameling irrasionale getalle as 'n OO-versameling rasionale getalle gedefinieer. Cantor het ook verder van die OO gebruik gemaak om sy reeks transfiniete getalle op te bou – die basis was weer die irrasionale getalle (vgl. Strauss s.j. WYS III: 5, 6).

In die jongste tyd (1968) was dit Lorenzen wat die seël daarop geplaas het deur op treffende wyse die eeue-oue erfenis waarop aangeleun word te weerspieël in sy beskrywing van hierdie moderne opvatting van reële getalle in terme van die OO "... en so word elke reële getal as 'n oneindige desimaalbreuk self reeds so voorgestel asof die oneindige hoeveelheid syfers almal tegelyk bestaan” (Wessels, 1982: 90).

Uit hierdie breedvoerige bespreking van die OO en SO blyk dit dat die OO beslis ’n getalsantesipasie (vanuit die feitlike sy) na die orde van opeens (wetsy) van die ruimte-aspek is. Dit kan dus definitief as ’n elementêre grondbegrip van die wiskunde beskou word. Die SO word beskou as ’n onontslote getalsin wat direk betrokke is by die konstitutiewe elemente van die getalsaspek. Die OO is ’n ontslote getalsidee wat beslis ’n tipe analogie is wat ’n elementêre grondbegrip genoem kan word. Daarenteen kan die SO nie op dieselfde vlak geplaas word nie en kan die SO dus nie as ’n elementêre grondbegrip beskou word nie.

Die wiskunde kan nie sonder die SO en OO klaarkom nie. Dit was Herman Weyl (1966: 89) wat die gedagte uitgespreek het dat die oneindige eintlik die hart van die wiskunde vorm. Vir hom sou die korrekte definisie van wiskunde wees dat wiskunde die wetenskap van die oneindige is. Die oneindige het sedert die negentiende eeu ’n bale belangrike plek in die wiskunde begin inneem, soveel so dat Hilbert, die grondlegger van die formalistiese denkskool in die wiskunde, in 1925 in ’n voordrag ter ere van Weierstrass gesê het:

> From time immemorial, the infinite has stirred man’s emotions more than any other question. Hardly any other idea has stimulated the mind so fruitfully. Yet, no other concept needs clarification more than it does (Hilbert, 1925: 136).

In dieselfde voordrag verwys Hilbert (1925: 140 -141) na die werk van Cantor oor die transfiniete getalle:

> Thus, thanks to the Herculean collaboration of Frege, Dedekind and Cantor, the infinite was made king and enjoyed a reign of great triumph. In daring flight, the infinite had reached a dizzy pinacle of success.

4.4 Omgewing

Die eerste vooruitgryping vanuit die getalsaspek na die ruimte-aspek is dié van omgewing, en wel ook puntomgewing. Hierdie is die topologiese ekwivalent van die breuke en is eintlik ’n antesipasie na die wetsy van die ruimte-aspek, naamlik die orde van opeens. Dit kan ook uitgedruk word as die topologiese ekwivalent van die geheel-dele relasie. Vir Strauss (1978: 14) is topologie die mees algemene ruimtedissipline en vertoon die sin van die ruimtelike uitgebreidheid baie duidelik. Ruimtelike kontinuïteit kan nooit teruggevoer word tot geïsoleerde punte nie. Punte kan op ’n lyn voorkom en die geneigdheid bestaan om ’n lyn in terme van ’n versameling punte te definieer om sodoende te verklaar dat ’n (kontinue) lyn uit (diskrete) punte opgebou is – klinkklare aritmetisisme. Strauss (1978: 33) spreek hom soos volg hieroor uit:

> Die versameling reële getalle, wat element vir element (d.w.s. een-tot-een) afgepaar kan word met die punte op die reguit lyn, verteenwoordig ’n vooruitwysing (antesipasie) aan die feitlike sy van die getalsaspek na die kontinue sin van die ruimte-aspek.

4.4.1 Die idee van ’n limiet

’n Onderafdeling van die werk oor omgewing is die idee van ’n limiet. ’n Behandeling van die limietbegrip veronderstel die probleem van rasionale benaderingsrye. Die kruks van die limietbegrip se ontwikkeling was dat dit nie verkry kon word deur konvergerende rye rasionale getalle nie. Dit was Weierstrass en eintlik Cantor wat ingesien het dat limiete veronderstel is om reeds getalle te wees (getalwaardes te verteenwoordig) en derhalwe ‘geplaas’ moet wees binne ’n getalsgebied waaruit enige willekeurige getal ‘n’ gekies kan word. Dit beteken dat die versameling reële getalle as ’n opeens-oneindige totaliteit reeds voor hande moet wees alvorens sinvol en algemeen gebruik gemaak kan word van die limietbegrip.

Gevolglik demonstreer die limietbegrip treffend hoedanig ’n fundamentele grondidee, naamlik die idee van die opeens-oneindige, onmisbaar in die ontwikkeling van die analise is.

Ses groot wiskundiges, naamlik Newton (1665 - 1666), Leibniz (1673 - 1676), D’Alembert (1770), Cauchy (1827), Weierstrass en Cantor (1874), het aan die limiet en afgeleide aandag gegee (Strauss, 1986: 29 - 31). Newton en Leibniz se vertrekpunt was die intuïtiewe aanvoeling van beweging; so was ’n kurwe vir hulle die pad van ’n bewegende punt (“flowing point”). Bell (in Strauss, 1986: 29) beskryf dit as:

> The ‘infinitely short’ path traced by the point in an ‘infinitely short’ time was called the ‘momentum’ and this momentum divided by the infinitely short time was the ‘fluxion’.

Hierdie ‘fluxion’ was niks anders as die afgeleide van ’n gegewe funksie nie. Later het hierdie onakkurate manier van verwysing na infinitesimale aanleiding tot probleme gegee.

D’Alembert beskou die oneindige self as ’n limiet. Dit slaan op hierdie gedagte dat wanneer ’n bepaalde grootheid ’n ander getal nader sodat die verskil tussen die grootheid en die getal kleiner word as enige spesifieke grootte, word hierdie waarde daardie grootheid se limiet genoem. Dit was egter veral hy wat gedurende hierdie tyd skerp kritiek uitgespreek het op oneindig-kleine groottes, en die Europese wiskundiges se aandag gevestig het op die limietbegrip as die kern-begrip van die analise (Strauss, 1977: 280).

Cauchy (in Strauss, 1986: 30) het egter steeds vasgeklou aan die gedagte dat die afgeleide in ’n bepaalde punt die “... ultimate ratio of the difference between infinitely small δy and δx” is. Cauchy hanteer ook ’n onverantwoorde oorgang van die ratio van infinitesimale klein getalle na die ratio- van normale getalle wat toereikend klein is.

Die volgende is ’n merkwaardige ry van rasionale getalle wat skynbaar ook aan die Grieke bekend was en is deur Cauchy gebruik om sy analise te fundeer:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985} \; ....$$

Die noemer van die tweede term word verkry deur die som van die noemer en teller van die eerste term te neem, terwyl die teller van die tweede term die som van die eerste twee terme se noemers is. So word elke daaropvolgende term verkry. Hierdie ry kan ook soos volg geskryf word:

$$\frac{1}{1} \left\langle \frac{7}{5} \right\langle \frac{41}{29} \left\langle \frac{239}{169} \right\langle \frac{1393}{985} \left\langle \; ....< \sqrt{2} < \quad \frac{577}{408} \right\langle \frac{99}{70} \left\langle \frac{17}{12} \right\langle \frac{3}{2}$$

wat aantoon dat albei reekse rasionale getalle konvergeer na $\sqrt{2}$. Die vraag ontstaan nou of hierdie proses van konvergente reekse die irrasionale getal $\sqrt{2}$ definieer? Kan daar dus nou gesê word dat daar irrasionale getalle gegenereer kan word deur van konvergerende reekse rasionale getalle gebruik te maak? Kan ’n irrasionale getal dus nou gedefinieer word as ’n limiet van konvergerende rasionale reekse?

Uit die reeks blyk dit dat elke volgende term ’n rasionale getal is. Anders gestel: elke term van hierdie benaderde konvergerende reeks rasionale getalle, is steeds die verhouding tussen twee heelgetalle en dus rasionaal – al strek dit tot in die oneindigheid (suksessief-oneindige). Daar is egter aangetoon dat $\sqrt{2}$ nie rasionaal kan wees nie – dit is altyd irrasionaal (vergelyk Strauss, 1986: 30 vir die bewys). Dit is dus nie moontlik om op hierdie wyse ’n limiet te definieer nie, want die bewys berus op ’n kontradiksie. Verder is dit ook waar dat wat ook al as limiet optree, reeds ’n getal moet wees. In 1883 het Cantor hierdie sirkelredenasie blootgelê en so hierdie definisie van die irrasionale reële getalle afgewys (Strauss, 1977: 281).

Ten spyte van die redelike hegte fundering wat Cauchy aan die analise besorg het, kon hy nie daarin slaag om ’n verantwoorde basis vir die invoering van reële getalle te bied nie – en juis die reële getalle was nodig vir die hegte opbou van die analise.

Die eerste goed-gedefinieerde definisie van 'n limiet het van Heine gekom in 1872. Heine het saam met Cantor onder Weierstrass gewerk en die volgende definisie geld vandag nog:

> ... (the) number 1 (is) the limit of a sequence (x_n) if, for an arbitrary positive number ε, a natural number n_o exists such that $/x_n - 1 / < \varepsilon$ for all $n_o < n$.

Hieroor maak Strauss (1986: 31) die volgende baie belangrike opmerking:

> This description presupposes that whatever number (rational or irrational) we choose to function as a limit, prior to its use it must already be known as a number. In other words, we cannot define new numbers with the aid of the concept of a limit, simply because every limit must already be some given number.

Daar word ook verder deur Strauss (1986: 31) verwys na Cantor wat blykbaar reeds voor 1872 hierdie insig openbaar het, want in 'n ander artikel in 1872 het Cantor die limietpunt van 'n oneindige puntversameling soos volg gedefinieer:

> ... if such a point contains in everyone of its neighbourhoods infinitely many points belonging to the given point-set but different from the point mentioned, the latter is called a limit-point of the point-set.

Hierby is sy (Cantor se) beskrywing van 'n punt-omgewing gevoeg wat belangwekkende gevolge vir die ontwikkeling van die topologie ingehou het.

Weierstrass het egter 'n nuwe grondslag gelê met die veronderstelling dat limiete gedefinieer kan word in terme van 'n statiese gebied wat alle reële getalle omvat. Die intuïsie-gedagte van kontinue beweging dat 'n veranderlike 'n limiet nader, is platgeslaan. Weierstrass het 'n veranderlike 'x' bloot geïnterpreteer as 'n letter wat enige waarde van 'n gegewe versameling getalle kan aanneem. Selfs die kontinue veranderlikes is vanuit statiese oorwegings gedefinieer. Hieruit het gevolg Cantor se siening van die opeens-oneindige (aktueel-oneindige) as 'n voltooide totaliteit, in al sy dele vas en bepaald, maar groter, as enige ander eindige grootte. Van hierdie siening sê Strauss (1977: 283) die volgende:

> Cantor was van mening dat egter juis die bestaan van aktueel-oneindige groot getalle die grond bied om te bewys dat aktueel-oneindige klein groottes nie bestaan nie.

Hierdie tyd in die ontwikkeling van die wiskunde staan dan ook bekend as die tweede krisis in die geskiedenis van die wiskunde.

Uit die geskiedenis van die wiskunde blyk dit egter dat die funksiebegrip en limietgedagte gebruik was om kontinuïteit te definieer. Hieroor kortliks die volgende (vgl. Strauss, 1969: 92 - 93):

Limiet: As die volgende ry beskou word:

$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};........;\frac{1}{n}$ d.i. $\{t_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

(L.W. 'n Ry is 'n funksie met 'n segment van die natuurlike getalle as definisieversameling: $\{t_n\}=\{ f(n) \}$, $n = 1;2;$ .... Wanneer n onbepaald toeneem, neem 1 onbepaald af maar bly steeds positief. Deur n groot genoeg te kies, kan ons die waarde van 1 willekeurig naby aan 0 bring.

Hiervolgens word gesê dat 0 die limietwaarde van die ry is wanneer n onbepaald toeneem deur die ry van natuurlike getalle. Limietwaarde staan ook bekend as grenswaarde. Dit word geskryf as grenswaarde. Dit word geskryf as $n \xrightarrow{\lim} \infty \frac{1}{n} = 0$

In 'n geval waar die grenswaarde nie bestaan nie, divergeer die ry. So bestaan $n \xrightarrow{\lim} \infty n^2$ nie. In die algemeen word die getal 1 die limiet van die ry $\{x_n\}$ genoem, as vir 'n willekeurige $\varepsilon > 0$, 'n natuurlike getal n_0 bestaan sodanig dat $/xn - 1/ < \varepsilon$ vir alle $n > n_0$.

Funksies: 'n Funksie is 'n een-eenduidige afbeelding volgens 'n bepaalde voorskrif waarvolgens elke element van 'n versameling X met een en net een van die elemente van versameling Y afgebeeld word. As f die voorskrif is, word dit geskryf as

f: X→Y. X word die definisieversameling (gebied) en Y die waardeversameling (terrein) van die funksie f genoem. As $x \in X$ en $y \in Y$, dan is $y = f(x)$. As f een-eenduidig is, dan is $f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$, of as a a' ==> f(a) f(a') .

Die gebruiklike definisie vir 'n funksie in 'n punt is soos volg:

> 'n Funksie f(x) is kontinu in die punt x = a as (i) f(x) nader tot 'n limiet as x nader tot a, (ii) f(x) bestaan in die punt x = a en (iii) die limiet as x→a gelyk is aan die funksiewaarde in die punt x = a. Eksakter wiskundig geformuleer, is f(x) kontinu, in die punt x =a as $\lim_{x-->a} f(x) = f(a)$

Strauss (1969: 93) verduidelik dat hierdie definisie nie kontinuïteit kan definieer nie, maar hoogstens die aard van 'n bepaalde funksie kan beskryf. Om te sê dat 'n funksie kontinu in 'n punt is, is om kontinuïteit juis te veronderstel. Verder besit 'n punt geen kontinuïteit nie, want dit is self afhanklik van kontinue uitgebreidheid. Vergelyk hiervoor ook die bespreking van die elementêre grondbegrip 'puntkontinuum' in afdeling 2.5. Strauss (1969: 93) vat dit soos volg saam:

> Omdat 'n funksie nie in iets anders as 'n punt kontinu kan wees nie en 'n punt op sy beurt geen selfstandige bestaan onafhanklik van kontinue

> uitgebreidheid in dimensies besit nie, veronderstel alle definisies van kontinue funksies altyd kontinuïteit wat uniek en tegelyk ondefinieerbaar is.

4.4.2 Topologie

Topologie en omgewing word hand-aan-hand gesien en geneem. "A neighbourhood of a given order" is 'n fundamentele idee wat ten grondslag van topologie lê. Topologie word soos volg deur Félix (1966: 66) beskryf:

> Topology is the part of mathematics which studies continuity, limits, tangents to curves and tangents planes to surfaces, the partitioning of spaces into regions and the possibility of assigning areas or volumes to them; and also speed, strengths of electric currents, and other expressions involving the idea of the derivative of a function.

Die term "neighbourhood" word wiskundig deur Félix aan die hand van die volgende verwysings verduidelik (1966: 67 - 71):

> ** in 'n versameling getalle in 'n versameling van punte in 'n vlak (of 'n drie-dimensionele ruimte);
> ** in die omgewing van 'n reguit lyn;
> ** in die omgewing van 'n punte-transformasie;
> ** in eenvoudige veralgemenings (hier word oppervlaktes en lengte van kurwes gebruik – ook tangentsiale omgewings: "that is, the tangents of neighbourhood points must have neighbouring directions") (Félix, 1966: 71).

Eves en Newsom (1965: 148) beskryf topologie in terme van die transformasies van kontinue en enkelvoudige funksies. Hy verklaar dat topologie van die Euklidiese vlak ook bekend staan as –

> ... rubber-sheet geometry, for in stretching or contracting a rubber sheet, the points of the sheet undergo just such a bicontinious single-valued transformation.

Vir Kasner en Newman (1979: 235) is topologie –

> ... a geometry of place, of position (which accounts for the name Analysis situs), as distinguished from the metric geometries of Euclid, Lobachevsky, Riemann, etc. which treat lenghts and angles. Its propositions would be as true of figures made of rubber as of the ordinary rigid figures encountered in metric geometry.

Hy verklaar dan ook dat dit die rede is waarom topologie bekend staan as "rubber-sheet geometry".

Kasner en Newman (1979: 272) en Félix (1966: 77) onderskei tussen algemene topologie en algebraïese topologie, waar algemene topologie vir hulle die studie van die limiete van 'n getallery asook van 'n reguitlyn is. 'n Limiet is vir Félix "... a concept that deals with the idea of almost equal to".

Die voorbeeld ter illustrasie wat hy kies, is $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\ldots\approx 2.$ Die som van die bogenoemde terme, d.i. 'n meetkundige reeks met eerste term 1 en die gemeenskaplike verhouding – die rede (ratio) – gelyk aan 'n $\frac{1}{2}$, sal al nader aan 2 kom, maar dit nooit bereik nie.

Algebraïese topologie is die studie van kontinue paaie wat die onderskeie punte van die verskillende deelversamelings van die ruimte verbind. Félix (1966: 77) verklaar dat interessante probleme van algebraïese topologie deur vierjarige kinders waargeneem en bekyk kan word, want " ... before he has any concept of numbers, the child has ideas of topology (unexpressed of course)". As hy gelos word om die volgende figure op sy eie oor te teken, sal gevind word dat hy die relasie 'topologiese ekwivalensie' verstaan. Die bedoeling hier is dat die jong kind hierdie tekeninge op so 'n wyse sal oordra

> ... that appears not to discriminate between the members of each pair. Since the members of each pair are topologically equivalent, this suggests that the child is only concerned to reproduce (or is only able to reproduce) the properties which are topologically significant (Félix, 1966: 122).

SKETSE:

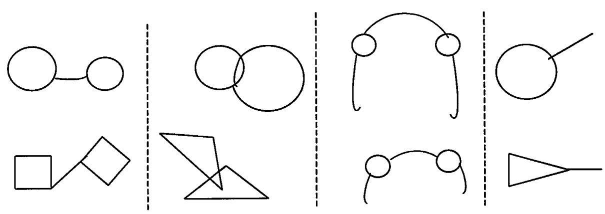

Fig. (i) (Félix, 1966: 77)

Op intuïtiewe wyse gesien, is twee figure in 'n plat vlak topologies ekwivalent as die een figuur kan oorvleuel ("coincide") met die ander, wanneer die plat vlak as elasties beskou kan word. Félix (1966: 77) verklaar verder:

> Metrical notions (distances, angles) do not come into it; only the number of regions and the kind of paths joining two points crossing such-and-such regions. The word 'path' here implies continuity; a point can be 'isolated' or at the intersection of several paths, and therefore the common limit of several subsets. Ideas of general topology are therefore implicit in these questions.

4.4.3 Gemiddeldes (middelwaardes)

Hierdie gedeelte oor middelwaardes sluit aan by die werk oor omgewing. Indien daar van benaderde data (gegewens) gebruik gemaak wil word, moet van behoorlike toepaslike metodes van berekeninge gebruik gemaak word. Daar is onder andere 'n meetkundige gemiddelde (t), 'n rekenkundige gemiddelde (m) en 'n harmoniese gemiddelde (h). So is

$t = \sqrt{ab}$,

$m = \frac{1}{2}(a+b)$ en

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Soms, wanneer daar gewigswaardes aan a en b toegeken word, word a en b met positiewe koëffisiënte vermenigvuldig en dan word die gewigswaarde gemiddelde (p), verkry,

$$p = \frac{k_1 a + k_2 b}{k_1 + k_2} \qquad \text{of}$$

$k_1(p - a) = k_2(b - p)$,

wat volgens die wet van momente (hefbome) soos volg daaruit sien:

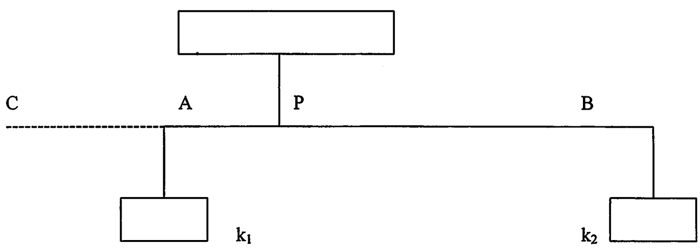

Fig. (ii) (Félix, 1966: 81)

Dus is k_1 AP = k_2 PB.

Hierdie gebruik van benaderde data en die ooreenkomstige metodes om berekeninge uit te voer, bring daardie deel van die wiskunde voor oë wat bekend staan as statistiek. In die talle eksperimentele en navorsingsaksies is dit dikwels nodig om van die moontlike middelwaardes van die data of reeks gebeurtenisse eksperimenteel te bepaal.

Voortvloeiend hieruit, is die gedeelte oor waarskynlikheidsleer. Hier word nou gesoek na 'n bepaalde korrelasie en as die korrelasie bestaan, kan die waarskynlikheid bereken word wat sal aantoon dat die bepaalde onbekende wel in 'n spesifieke omgewing (groepering van waardes, interval) sal kan voorkom – in plaas daarvan om die spesifieke waarde van die onbekende waarde van y = f(x) te gaan bereken.

Die betekenis van hierdie benadering is dat vir die bekende waarde x wat gekies is, die antwoord nie meer uitsluitlik afhang van die omgewing h as dit klein genoeg is nie. As die waarskynlikheid baie kleiner is as 1, het daardie antwoord geen voorspellingsmoontlikhede nie. Die waarde van 1 dui die grootste sekerheid aan. As daar met die samelewing gewerk word, word daar gewoonlik groot verteenwoordigende steekproewe (monsters) getrek. Dit bly egter maar 'n klein gedeelte van die bevolking. In statistiek en waarskynlikheidsleer word, anders as by algebra en topologie, vaste omgewings gekies. Die idee van 'n limiet het egter arbitrêre klein omgewings na vore gebring: "we had to be able to reach a conclusion, however small the neighbourhood involved ... " (Félix, 1966: 86).

In die eksperimentele bepaling van gemiddeldes is die mens dikwels daarop aangewese om omgewings óf te skaal óf om 'n keuse binne 'n omgewing te maak – 'n bepaalde waarde te kies. Die eerste geval is waar die verlangde waarde redelik vas bepaald is, soos die posisie van 'n skip op die see, of as die skip 'konstant' in 'n bepaalde rigting sou vaar. Die tweede geval is waar dit nie bekend is dat die waarde waarna gesoek word nie presies bepaalbaar is nie. Hier word gedink aan 'n pendulum waar die verband tussen die aantal ossilasies en die ooreenstemmende tyd gevind word. Daar word gesoek na 'n gemiddelde periode as die tyd in sekondes (t) elke 10 swaaie (n) geneem word.

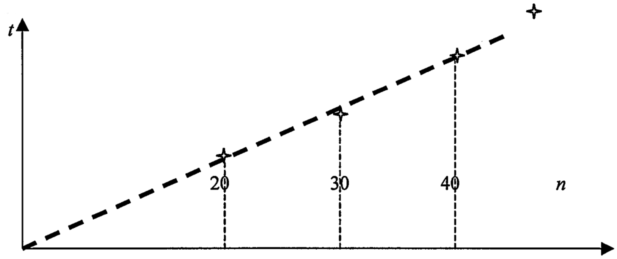

Fig. (iii) (Félix, 1966: 83)

As gevolg van talle faktore sal elke tydsmeting vir 10 ossilasies verskil. Dit volg dat die tyd nie 'n funksie is van die aantal ossilasies nie. Daar is hoogstens 'n korrelasie tussen die twee veranderlikes. Die verwantskap sien grafies soos volg daaruit:

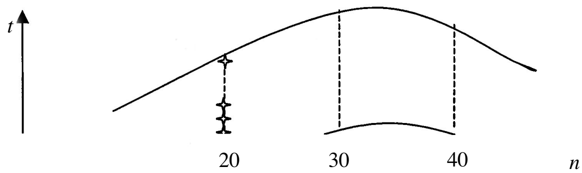

Fig. (iv) (Félix, 1966: 84)

Die derde geval is waar die korrelasie nog vaer word, soos om 'n korrelasie wat 'n vaste syferwaarde het, te vind tussen die omtrek van 'n dame se duim en haar liggaamsmate om vir haar 'n rok te sny. Of tussen die ouderdom van 'n manlike eienaar van 'n boot en die lengte van die boot asook die krag van die enjins van die boot.

'n Volgende geval kan wees waar daar na die verband gesoek word tussen die ouderdom x van 'n vrou en die ouderdom y van haar man. Die grafiek hieronder toon 'n strooiingsdiagram wat die volgende tipe vraag kan beantwoord: Wat kan gesê word van die ouderdom van 'n eggenoot as sy vrou 25 jaar is? Daar word nou 'n omgewing h gekies vir x = 25. Die vraag is nou: Is dit waarskynlik dat die man se ouderdom tussen 30 en 35 gaan wees as sy vrou 25 is? Die aantal punte word getel in die interval 30 < y < 35. Daar is nou 'n bepaalde waarskynlikheid $\frac{n}{N}$ dat die man se ouderdom daar sal lê. Daar is dus 'n korrelasie wat die waarskynlikheid is om 'n bepaalde waarde in 'n bepaalde omgewing aan te tref.

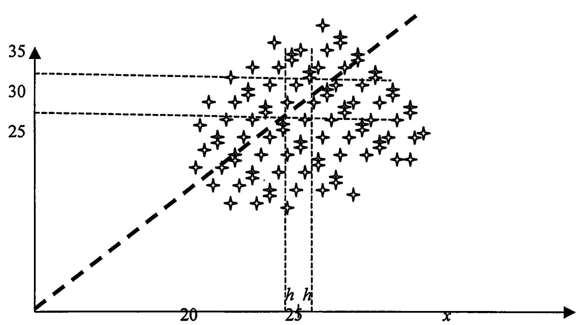

Fig. (v

Hierdie gegewens oor die ouderdomme van man en vrou, kan nog groter betekenis verkry wanneer 'n verdere grafiek getrek word. Langs die x-as word die verskil in ouderdomme van getroude pare geneem en langs die y-as word die aantal pare geplaas wat hieraan voldoen.

Die vorm van die grafiek is simmetries klokvormig as die verspreiding van die data ideaal (normaal) is. Die grafiek kan egter skeef na links of skeef na regs vertoon as die data 'n wanbalans bevat.

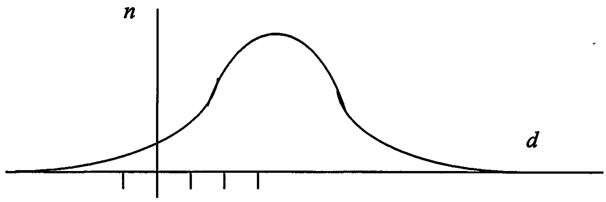

Fig. (vi) (Félix, 1966: 86)

Op hierdie wyse kan gesê word dat die berekende waarskynlikheid vir die bevolking in die steekproef geldig is, maar in realiteit is slegs 'n greep geneem. Die getoetste groep is altyd maar net 'n deel van die hele populasie (Félix, 1966: 85).

4.4.4 Die benadering van die reëele getalle

In 'n vorige artikel: "Die uniekheid van getal en ruimte as grondslag vir besinning oor die elementêre grondbegrippe in die wiskunde"[2] is, onder die uitbreiding van die getallestelsels, aandag gegee aan die 'oorbrugging' van die diskrete verskil tussen die reëele getalle. Daar is aangetoon dat veral Dedekind op hierdie punt daarin 'geslaag' het om kontinuïteit in die oorspronklike getalsin in te dra met sy definisie van die irrasionale getalle, daar hy die gapings tussen getalle wou opvul met suiwer denkpunte. Die irrasionale getalle sou dan die middel word waardeur Dedekind sou sorg dat kontinuïteit uit diskreetheid opgebou word deur van kontinue punte gebruik te maak. Die daaropvolgende benadering van $\sqrt{2}$ as 1,414 in die geslote ingeslote interval word deur middel van die konvergerende reeks sub-intervalle gedoen, waarvan die mens nie 'n begrip nie, maar slegs 'n idee kan vorm.

Die tegniek wat Dedekind gebruik het, was om sy bekende snede-stelling ("cut-principle") te formuleer en dit te gebruik om sy finale formuleringe

2. Spesiale uitgawe 1 van die *Tydskrif vir Christelike Wetenskap*, 2006(42).

te regverdig. Dedekind (in Strauss, 1969: 185) het volgens sy siening van die kontinuïteit van die reële getalle gesê:

> If the system R of all real numbers breaks up into two classes U1, U2 such that every number a1 of the class U1 is less than every number a2 of the class U2 then there exists one and only one number by which this seperation is produced.

Die sisteem rasionale getalle kon nie aan die stelling voldoen nie, want dit is sinloos om te probeer redeneer dat $\sqrt{2}$ rasionaal is. Daar bestaan geen rasionale getal waarvolgens so 'n verdeling tussen U1 (kwadrate kleiner as 2) en U2 (kwadrate groter as 2) gemaak kan word nie. Die snede-stelling 'werk' alleenlik by die reële getalle want sy getalbegrip het dit moontlik gemaak om te sê dat 'n lyn sy kontinuïteit te danke het aan die reële punt-kontinuum.

Félix (1966: 77 - 79) beskryf op welke wyse hy te werk sal gaan om benaderde getalle volgens die bewerking a + b x, waar a in die omgewing is van 3,58 tot die orde 0,005 (d.i. k) en b in die omgewing is van 2,14 tot die orde 0,01 (as h) op te tel of af te trek. Die vraag is wat kan nou van x gesê word? Félix (1966: 78) ondersoek die som en produk van a en b en kom tot interessante formuleringe wat betref omgewing en die benadering van getalle. As daar opgetel word asof die terme eksak is, word die middelpunt van 'n omgewing verkry.

Dit word ook grafies voorgestel. Ten opsigte van die verskil tussen a en b word gewerk met die som van die maksimum fout omdat die tekens van die 'foute' onbekend is.

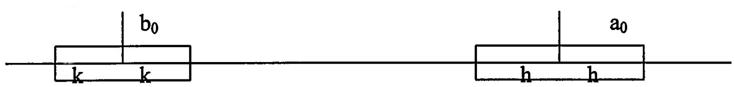

Fig. (vii) (Félix, 1966: 78)

So is $a_0 - h < a < a_0 + h$ en $b_0 - k < b < b_0 + k$ en daar kan aangeneem word dat h en k klein genoeg moet wees sodat hul omgewings mekaar uitsluit en dat a > b. Uit die figuur blyk dit dat $(a_0 - b_0) - (h + k) < a - b < (a_0 - b_0) + (h + k)$.

Verder word daar uit die verskil tussen a en b afgelei dat a - b nie met méér van $a_0 - b_0$ verskil as h + k nie.

Ten opsigte van die produk word die positiewe twee getalle se produk gekoppel aan die oppervlakte van 'n reghoek. 'n Dubbele ongelykheid word aangetoon deur die volgende uitdrukking en skets:

$a_0b_0 - (a_0k + b_0h) < ab < a_0b_0 + (a_0k + b_0h) + hk$

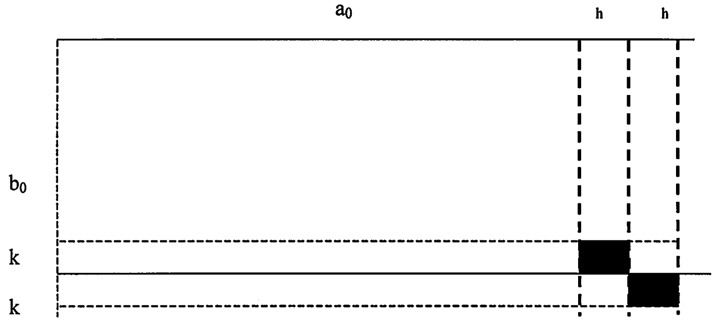

Fig. (viii) (Félix, 1966: 79)

Dus sal die fout in die produk, $x = ab - a_0b_0$, nie groter wees as $a_0k + b_0h + hk$ nie. Die fout $\frac{x}{a_0b_0}$ wat ook bekend is as die relatiewe fout, is begrens deur $\frac{h}{a_0}+\frac{k}{b_0}+\frac{hk}{a_0b_0}$.

Die twee verhoudings $\frac{h}{a_0}$ en $\frac{k}{b_0}$ k stel die boonste grense van die relatiewe foute van die twee faktore voor. Interessante gevalle kom na vore waar die maksimum foute h en k (genoem absolute foute), van die terme van ’n som eksak, of amper eksak of gelyk is en waar die relatiewe foute van die faktore van ’n produk eksak is of amper gelyk is.

Hierdie verwysings na absolute en relatiewe foute en eksak en gelyk, is aanduidinge van die graad van benadering wat toegepas word, want hierdie graad van benadering bepaal of die daaropvolgende berekening enige beduidenis sal hê. In sterrekunde is dit van besondere belang. Hiervan sê Félix (1966: 79, 80):

> It is the least accurately determined measure which what can be inferred, and improvement of the other terms is unprofitable. It is for this reason that, because the turbelence of the atmosphere causes fluctuations in the images of a star, it is no good trying to improve estimates of the star’s distance by increasing the resolving power of the instruments.

4.5 Puntkontinuum en feitlike groottes

Puntkontinuum moet nie verstaan word dat ’n punt of getal kontinu is nie. Daar is by herhaling verwys na die sin van die versameling reële getalle wat na die modale ruimte-aspek antesipeer. Volgens Stafleu (1980: 41) geld dit vir die sin van elke reële getal. Hy vervolg –

> Real numbers do not refer to discrete sets, but to continuous sets, such as the set of all points on a line.

Hiermee definieer Stafleu nie kontinuïteit met behulp van die reële getalle nie, want hy sê self (1980: 49):

> It is of no use to define, a line, a plane, or a space as collections of points, lines or planes. To be sure, we have a continuous, non-denumerable collection of points on a line, but this cannot serve as a constitutive definition.

Dit was egter juis hierdie analogie van die getalsaspek na die ruimte-aspek wat die wiskundiges dikwels verlei het om so in die verlede die reële getalle te gebruik om kontinuïteit te definieer. Vergelyk ook die uitsprake ten opsigte van die puntkontinuum in afdelings 4.1, 4.2 en 4.3. Uit hierdie hele beredenering blyk dit dat die begrip puntkontinuum 'n elementêre grondbegrip is wat fundamenteel in die wiskunde figureer. Ten opsigte van feitlike grootte net die volgende enkele samevattende opmerkings.

Die krisis van die Pythagoreise skool het dit uitgewys dat die rasionale getalle onvoldoende vir die getalsobjektiveringe van ruimtelike groottes was. Dit is volgens Stafleu (1980: 41) die 'taak' van die reële getalle om "magnitudes" (groottes, groothede) soos lengtes, oppervlaktes en volumes te objektiveer. Om enige feitlike grootte voor te stel, word die reële getalle dus benodig. Stafleu (1980: 42) stel dit soos volg:

> The length of a line segment is an actual, real magnitude. In the opening process the original closed meaning of a modal aspect is deepened and relativized. The deepening means that not only discretes sets, but also magnitudes can be numerically ordered. With real numbers non-numerical subjects can be ordered according to their magnitudes without gaps or holes. This relativization of modal meaning entails the loss of the discrete or denumerable character of number in the numerical modal aspect.

Strauss (1973: 185) waarsku skerp teen Stafleu se inkleding hier van relativering. Strauss dui aan dat: "Die relativering van die getalsin deur die ontsluiting daarvan dui egter in feite by Stafleu op die kansellering van die sinkern van die getalsaspek." Strauss verklaar dat hierdie weg wat Stafleu inslaan veroorsaak dat kontinuïteit sy oorspronklike ruimte-sin verloor en tegelyk ook slegs as analogiese begrip binne die getalsaspek ten koste van die diskrete sin van die aritmetiese modaliteit gehuisves kan word. Dit kan tog nie.

Grootte is dus ’n nie-numeriese relasie (analogie) wat deur ’n reële getal geobjektiveer kan word. Daar is van hierdie relasies wat slegs in ’n bepaalde volgorde van klein na groot georden kan word, indien hulle opgebreek kan word in komponente wat gelyktydig ook hierdie relasie bepaal. Dit is eerstens van toepassing op ruimtelike posisie, maar ook op krag, snelheid, die fisiese toestand van ’n sisteem ensovoorts. In hierdie situasie word daar gepraat van ’n vektor want hierdie relasie kan nie geobjektiveer word deur ’n enkele reële getal nie, maar deur ’n “multiplet” of “n-tuple” van getalle. So (vgl. Stafleu, 1980: 43) lyk die definisie van ’n vektor:
$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n)$.

4.6 Hoeveelheid dimensies en die dimensie-getal

Hierdie objektivering van getal in die ruimte, soos tot sover hanteer, kom ook na vore by die aanduiding van die hoeveelheid dimensies en die dimensie-getal. Stafleu (1980: 43) verduidelik dat as die minste aantal reële getalle benodig word vir die objektivering van ’n eienskap of relasie, dan word dit die dimensie van daardie verwantskap genoem. Die dimensionaliteit van ruimte aan die wetsy en ruimtelike grootte aan die feitlike sy (lengte, afstand, oppervlakte en volume) retrosipeer na die getalsaspek se wetsy (orde van suksessie).

Vir Stafleu (1980: 47) is dit in albei gevalle ’n ontsluiting van die getalsaspek: “... the concept of dimension refers to the concept of independence of the components of a vector, and spatial magnitudes have real numerical values.” Hy verduidelik dat dit nie beteken dat die mens voor die ontdekking van die reële getalle nie geweet het wat lengte is nie, maar dat na die ontdekking, die kennis en begrip ten opsigte van lengte en ander ruimtelike groottes verdiep het. Uit die modale gesigshoek is die aantal dimensies van ruimtelike subjekte nie beperk tot drie soos in die geval van fisiese subjekte nie. Dit is nie moontlik om dit meetkundig te verklaar nie – dit moet eerder verstaan word as een van die mees algemene tipiese wette vir fisies-gekwalifiseerde entiteite; dis ’n wet wat onherleibaar is tot enige ander modale wet.

By die dimensie-getal is dit belangrik om te onthou dat dimensies nie in ander getalle aangedui word as integrale (heeltallige) getalseenhede nie. Dit verskyn dan ook as ’n integrale (heeltallige) getalsanalogie aan die wetsy van die ruimte-aspek. Daar word tog immers gepraat van een, twee en drie dimensies in die ruimte-aspek (aan die feitlike sy).

4.7 Differensiasie en Integrasie

Dit was Newton wat in die jare 1665 - 1666 sy eerste 'calculus' die lig laat sien het. Hy het dit egter nie wêreldkundig gemaak nie – hy het dit eers in 1711 gepubliseer. Dit is egter waar dat Leibniz onafhanklik van Newton in 1673 - 1676 dit ook ontdek het – hy het dit in 1684 en 1686 gepubliseer. Newton het langer gewag, omdat daar 'n kontroversie ten opsigte van die ontdekking was.

Die 'calculus' was ook bekend as infinitesimaalrekene en het bestaan uit differensiaalrekene en integraalrekene. Strauss (1977: 279) verduidelik dat dit deur middel van die differensiaalrekene moontlik was om die helling van 'n gegewe kurwe in enige punt te bepaal (dit staan trigonometries bekend as die tangens). Met behulp van die integraalrekene wat in die praktyk as 'n spieëlbeeld (invers) van die differensiaalrekene ontwikkel het, kon wiskundiges oppervlaktes en volumes van figure bereken wat (gedeeltelik) begrens word deur kurwes.

Differensiasie en integrasie het 'n baie sterk ruimtelike konnotasie. Enkele elemente van hierdie 'calculus' het reeds baie eeue vroeër na vore gekom. Archimedes (287 - 212 v.C) het in sy *Method* reeds daarvan blyke gegee dat hy met 'n algebraïese bewys die volume van 'n sfeer bevind het as vier keer so groot soos die volume van 'n kegel met 'n basis wat dieselfde maat het as die groot sirkel van die sfeer en hoogte gelyk aan die radius.

Boyer (1969: 381) beskryf dit soos volg: "Archimedes discovered this theorem through an ingenious balancing of circular sections of a sphere and a cone against circular elements of a cylinder ..."

Boyer (1969: 382, 383) verduidelik dat Pappus ongeveer 'n eeu vroeër, in die jaar 320 v.C., in sy *Mathematical Collection*, dit uiteengesit het dat die volume wat ontstaan deur die rotasie van 'n figuur in 'n vlak rondom 'n as wat nie die figuur sny nie, gelyk is aan die produk van die oppervlakte van die figuur en die afstand wat die swaartepunt van die figuur in die vlak beweeg as gevolg van die rotasie. Pappus was ten volle bewus van die krag en waarde van hierdie algemene teorema en sy analogiese betekenis ten opsigte van die oppervlaktes van die vlakke wat deur die rotasie verkry word. Pappus verduidelik egter ongelukkig nie hoe die bewys van hierdie teorema lyk nie (Boyer, 1969: 383).

In die veertiende eeuse skolastiese argumentasie word 'n verskuiwing van die statiese banadering wat tot nog toe gegeld het, aangetref – die studie van dinamiese verandering het na vore getree. Vrae soos: "As 'n voorwerp met 'n variërende snelheid voortbeweeg, hoe ver sal dit beweeg in 'n bepaalde tyd?", of "As 'n liggaam onegalig verhit word, hoeveel warmte is daar in die hele liggaam?", is grondig ondersoek. Dit was Nicole Oresme (1323 - 1382), 'n biskop van Lisieux, wat die eerste vraag beantwoord het deur die oppervlakte onder die kurwe te ondersoek en dit dan gelyk te stel aan die afstand wat afgelê word deur die bewegende liggaam in 'n bepaalde tyd. Die basiese bewerkings en berekenings van Oresme is twee-en-'n -half eeue later deur Galileo Galilei bevestig. Hulle het almal gebruik gemaak van die eeue-oue idee van meetkundige elemente. Boyer (1969: 385) tipeer dit soos volg: "... they thought of the distance triangle and the rectangle as made up of indefinitely many vertical straight lines."

Hierdie idee het aangesluit (Boyer, 1969: 384) by die gedagte dat die oppervlakte onder die kurwe die afstand sal voorstel wat afgelê is –

> . . . for it is the sum of all the increments in distance corresponding to the instantaneous velocities.

Dit was dan ook hierdie idee wat later aanleiding gegee het tot al die filosofiese en logiese paradokse waarin Zeno homself en die Griekse wiskunde laat beland het.

Uit die geskiedenis van die wiskunde, vergelyk Boyer (1969: 385) as 'n leidende figuur in hierdie veld, blyk dit dat die begrip differensiasie nooit in die Middeleeue voorgekom het nie. Die begrip 'integrasie' het die begrip 'afgeleide' en 'differensiasie' met ongeveer 2000 jaar vooraf gegaan. Vandag is dit egter so dat die beginner 'calculus'-student –

> ... looking at the representations of Oresme, probably would first think of the steepness of the velocity-time curve as a measure of the acceleration, the rate of change of velocity with respect to time. Only later is he likely to think of the area under the graph as a measure of distance; today the concept of the derivative is usually presented first in calculus courses, with the notion of the integral coming later.

Dit was Pierre de Fermat (1601 - 1665) wat in die jaar 1655, 'n baie eenvoudige manier ontdek het om die maksima en minima van 'n polinomiese kurwe te bepaal. In dieselfde tyd het hy saam met Rene Descartes ontdekkings gedoen in die analitiese meetkunde en so het Fermat die proses van differensiasie ontdek aan die hand van sekere idees in die analitiese meetkunde (vgl. Boyer, 1969: 389).

In die sestiende en sewentiende eeue, spesifiek die sewentiende as die goue eeu, het 'n geweldige bloeitydperk plaasgevind. Waar die Griekse wiskunde hoofsaaklik staties van aard was, het die klem nou verskuif na 'n analise van veranderlikheid. Die logaritmes van John Napier (1550 - 1617), die basiese sterrekunde van Copernicus en die gevorderde sterrekunde van Kepler en die dinamika van Christiaan Huygens, het vir gevorderde en hoër wiskunde gevra. Die tyd was ryp vir die opbou van 'n infinitesimale analise wat vandag as 'calculus' bekend staan. Al die nodige tegnieke en apparaat was reeds beskikbaar – daar was net 'n skerp aanvoeling van die universiliteit van die reëls nodig. Dit is dan ook geen wonder dat die geskiedenisfilosowe van die wiskunde en natuurwetenskap van die wêreld Newton soos volg besing het nie:

> Nature and Nature's laws lay hid by night
> God said: 'Let Newton be!' and all was light (Eves, 1971: 164).

Want dit was hy en Leibniz wat hierdie magtige stuk gereedskap vir die natuurwetenskap beskikbaar gestel en getem het. Hulle saam het 'n nuwe en algemene oneindigheids-analise daargestel wat vir alle funksies – rasionaal en irrasionaal, algebraïes en transendentaal gegeld het. Die verskil tussen hierdie twee reuse se bydraes in die wiskunde is dat Leibniz basies 'n algebraïese invalspoort en Newton 'n geometriese invalspoort tot hierdie hoëre vorme van analise gekies het. Talle wiskundiges se name wat kleinere ontdekkinge en uitbreidings tot hierdie twee mense se werke gedoen het, kan nou bygevoeg word. Hulle is egter te veel om op te noem en hulle insette word vir die doel van hierdie navorsing nie benodig nie.

Die ware aard van differensiasie en integrasie gaan nou ondersoek word. As die afstand-tyd relasie deur die voorskrif y = f(t) aangegee word, is $\frac{dy}{dt}$ die spoed op 'n bepaalde tydstip t.

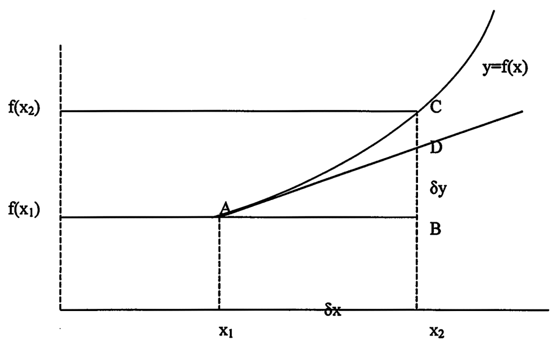

Fig. (ix) (Strauss, 1969: 222)

In bostaande skets moet die deel van die kromme y = f(x) beskou word. Indien die helling van die kromme in punt A bereken wil word, moet soos volg te werk gegaan word. Die loodregte projeksie van die punte A en C op die x-as is die punte x_1 en x_2. Hul ooreenstemmende projeksies op die y-as is $f(x_1)$ en $f(x_2)$. Die afstand vanaf x_1 tot x_2 word aangedui met h, maar staan ook bekend as δx. As die lengte van die afstand h nader aan nul kom, volg dit dat uit 'n gegewe tyd en afstand, die spoed afgelei kan word. Die afgeleide – word gewoonlik aangedui met die simbole $\frac{dy}{dx}$ of y'

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = y' = \frac{dy}{dx}$$

Die uitdrukking dy = f(x)dx staan bekend as die differensiaal van y (of van f(x)). Die afstand h word aangegee deur $/x_1 - x_2/$.

Vir integrasie word die sommasie-simbool $\int$ gebruik – die algemene skryfwyse is $\int_a^b f(x)dx$ wat sommering oor 'n oneindige aantal intervalle aandui, dit wil sê, die integraal van f(x) tussen die grense a, b.

Uit voorgaande saaklike beskrywing van differensiasie en integrasie, is dit duidelik dat dit moontlik is om hierdie twee bewerkings sodanig wiskundig te implementeer dat daar nie van beweging (in die funderende tydsrigting) sprake is nie. Die bewegingsaspek is egter in die transendentale tydsrigting ten opsigte van getal en ruimte geleë en daarom kan daar in die differensiaal- en integraalrekene hoogstens antesiperend vooruitgewys word na die modale bewegingsin (vgl. Strauss, 1969: 225). In der waarheid is die modale getalsin hier ontsluit deur hierdie verdiepte wiskundige bewerkings onder leiding van die kontinuïteit van die menslike denkbeweging. Die limietwaarde van die differensiaalfunksie, wanneer δx nader tot nul, laat ook die kwosiënt $\frac{\delta y}{\delta x}$ in 'n oneindige reeks veranderende getalswaardes nader tot nul. Dit verteenwoordig in hierdie sin die benaderde aard van oneindig klein veranderende diskrete getalswaardes na die bewegingsin. Strauss (1969: 225) vat hierdie gedagtes soos volg saam:

> Die hele ontwikkeling van hierdie onderdeel van die wiskunde, berus dus op 'n antesiperende modale struktuurmoment van die getalsaspek, wat, soos ons gesien het, slegs verdiep kan word onder leiding van die teoretiese denkbeweging, waardeur die getalsfunksie benaderd vooruitwys na die kontinuïteit van kinematiese beweging, sonder om die bewegingsin self te bereik. Die benadering van die bewegingsin-kern deur die oneindige (reële) differensiaal-getalsfunksie, gee 'n verdieping aan die getalsin in die transendentale tydsrigting waarvan ons ewe-eens slegs 'n idee kan vorm.

Dit is belangrik om hierop te let dat die getalsfunksie via die ruimte-funksie na die kinematiese aspek vooruitwys. Onder leiding van die bewegingskontinuïteit van die teoretiese denke, word die modale sin van die getalsfunksie verdiep, deurdat die bewegingsantesipasies daarin ontsluit word. Strauss (1969: 221) verwys hier na die hantering van rotasie-groepe in die moderne groepe-teorie. Daar kan nie sonder 'n begeleidende idee van die getalsantesipasie na die kinematiese sin, wiskundig sinvol oor rotasie-groepe gepraat word nie. Daar is tog in die oorspronklike getals- en ruimtesin nie sprake van oorspronklike beweging nie. Selfs in die analitiese meetkunde is dit sinloos om te praat van bewegende punte – die lokusbegrip in skoolhandboeke – wat 'n sekere baan beskryf, indien die antesiperende struktuur van die ruimte (na onder andere die kinematiese aspek) nie verreken word nie.

Met verwysing na paragraaf 3.2.3 in die vorige artikel kan die volgende nou bygevoeg word ten opsigte van die projektiewe meetkunde. Strauss (1969: 226) verklaar dat dit slegs verstaan kan word in die lig van Leibniz se program van 'analysis situs' waarin die antesiperende reeksbeginsel in die ruimte-aspek tot openbaring kom. Hier verskyn die –

> ... theoretical attempt to discover the constant correlative functions of spatial figures of the same group that approximate the original meaning of motion in an infinitesimal series of positional variations (Dooyeweerd in Strauss, 1969: 227).

Aandag moet nou bestee word aan die invoering van imaginêre snypunte in getransformeerde sisteme – imaginêre ruimtefunksie – wat direk gekoppel word aan die komplekse getalfunksies.

4.8 Imaginêre eenhede en komplekse getalfunksies

Die geskiedenis van die wiskunde het die noodsaaklikheid van die voortbring van nuwe getalle uitgewys. Uit die ontwikkeling van die algebraïese teorie was dit logies dat die imaginêre eenheid, $\sqrt{-1}$ en die komplekse getal x + yi, waar i = $\sqrt{-1}$, na vore moes kom. Dis belangrik om te besef dat hierdie getalle nie reëel is nie. Daarom was dit lank in die wiskunde bekend as 'the great calamity'. Die gedagte dat so 'n getal ook betekenisloos is, het lank bestaan (Hellmich, 1969: 291). Dit was Leonhard Euler (1748) wat heel eerste die simbool i toegeken het aan die getal, $\sqrt{-1}$. Verder was dit Carl Friedrich Gauss (1832) wat die begrip 'komplekse getal' ingevoer het. Dit was William Rowan Hamilton (1832) wat die komplekse getal as 'n getallepaar uitgedruk het (Hellmich, 1969: 292).

Dit was egter veral Girolamo Cardano, 'n Italiaanse wiskundige, wat reeds in die jaar 1545 in sy *Ars magna* beweer het dat daar wel met getalle soos 5 + $\sqrt{-15}$ gewerk kan word en dat dit 'n sinvolle oplossing is van byvoorbeeld die volgende probleem: "Verdeel 10 in twee dele sodat die produk van die een met die ander 40 is". Hierdie voortspruitende vergelyking se wortels is juis 5 ± $\sqrt{-15}$, want die produk is 25 - (-15) wat gelyk aan 40 is. Hiervandaan het dinge in daardie stadium egter nie verder ontwikkel nie, want Cardano was sy tyd ver vooruit (Baumgart, 1969:

245). Twee komplekse getalle, a + ib en x + iy is gelyk as en slegs as a = x en b = y, en x staan bekend as die reële deel en b en y as die imaginêre deel van die komplekse getal. In poolvorm kan a + ib geskryf word as r(Cosθ + iSinθ) indien a en b onderskeidelik die x en y koördinaat in die kompleksvlak aandui en r die afstand van die punt C(x, y) in die kompleksvlak na die oorsprong.

Die onderskeiding tussen begrip en idee is weer hier van belang as daar gekyk word na die imaginêre getalseenheid, i = √-1. Die formaliste kon geen begrip vorm van die aard van i nie en vir hulle was dit bloot 'n abstrakte denk-konstruksie. Vir WW Sawyer was dit bloot 'n formele operator, wat as sodanig eintlik nie 'n getal is nie. Hy het 'n ander skryfwyse ingevoer vir i om so te beklemtoon dat i nie 'n getal is nie (Sawyer, 1967: 219). Strauss (1969: 227, 228) stel dit dat die mens van √-1 nie 'n begrip kan vorm nie, slegs 'n idee. Hierdie imaginêre getalseenheid figureer egter binne die getalsaspek en dit is sinloos om te dink dat die idee van hierdie eenheid nie kosmologies gefundeerd is nie – dit is egter tipies van die immanensie-filosofie om die getalsidee te herlei tot getalbegrip om so 'n 'verskynsel' sy getalsaard te ontneem wanneer hierdie herleiding nie slaag nie.

Hierdie imaginêre getalseenheid is 'n verdieping (ontsluiting) van die getalsfunksie wat die vroeër behandelde ruimte-antesipasies van die reële getalle te bowe gaan. Rotasie-groepe openbaar via die ruimte-aspek antesipasie na die modale bewegingsin. Wanneer die rotasie-moment toegepas word op matrikse, kan in meer diepte kennis geneem word van i, wat buite die bestek van hierdie studie val.

Strauss (1969: 232, 233) dui aan dat dit veel makliker en korter is om die formules vir trigonometriese funksies met behulp van die komplekse getalle of te lei. Cos a en Sin a kan in terme van 'n eksponensiële uitdrukking weergegee word. As πi = x ingestel word in e^x, volg dit:

$e^{\pi i}$ = Cos π + i Sin π , (2π = 360°)

en so is $e^{\pi i}$ = (-1) + i(0)

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Netso is $e^{\pi i} - 1 = 0$ .... (2)

Hierdie vergelyking (1) bevat die vyf merkwaardigste getalle in die wiskunde. Die getalle 1 en 0 is die enigste twee idempotente getalle in die wiskunde (indien hulle gekwadreer word, bly hulle ident aan sigself). Die getal i is die imaginêre getalseenheid en die getalle e en π is twee transendente getalle – dis getalle wat nie algebraïes is nie. Algebraïese getalle is byvoorbeeld die wortel van $x^5 - 3 = 0$. Hulle kan reëel of kompleks wees. Dit was eers in die 19de eeu dat die bestaan van transendente getalle aangetoon is. In 1844 het Joseph Liouville aangetoon dat sekere getalle nie-algebraïes is, soos byvoorbeeld die getal – 0,110001000000000000000000100000.............

Ongeveer 30 jaar later het Georg Cantor sy teorie van transfiniete getalle gebruik om te bewys dat transendente getalle bestaan – merkwaardig hiervan was dat Cantor nie 'n enkele transendente getal bereken het nie. Hy het ook aangetoon dat die meeste reële getalle transendent is en nie algebraïes nie. Transendente getalle is van die vorm $a_1.10^{-(1!)} + a_2.10^{-(2!)} + a_3.10^{-(3!)} + ...$ waar a_i arbitrêre getalle van 1 tot 9 is.

Strauss (1969: 233) beklemtoon die uniekheid van hierdie vyf getalle in een vergelyking. Dit kon eers plaasvind na die verdiepende ontsluiting van die getalsin deur die imaginêre getalseenheid. Dooyeweerd (in Strauss, 1969: 233) beskryf i self as "... the approximation of the modal directions of pure movement in the modal function of number." Die sinkern van die getalsaspek en al die antesiperende struktuurmomente wat tot dusver ondersoek is, is saamgetrek in hierdie vergelyking. Die sinkern van die getalsaspek word uitgedruk deur die getalle 1 en 0, die ruimtelike antesipasie deur die twee transendente getalle e en π, terwyl die bewegingsantesipasie verteenwoordig word deur i. Voorwaar merkwaardig!!

Ten slotte word verwys na enkele ander imaginêre eenhede soos j en k. Die eenhede i, j en k staan bekend as kwaternione – elkeen van hierdie imaginêre eenhede stel 'n 90^0 rotasie van een van die onderling loodregte drie-dimensionale asse voor. Die konsep van 'n komplekse getal is uitgebrei vanaf a + ib na a + ib + jc + kd, (a, b, c, d reëel) waar $i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk$. Die mees merkwaardige eienskap van hierdie kwaternione is dat die kommutatiewe wet vir vermenigvuldiging nie geld nie (Baumgart, 1969: 256). William Rowan Hamilton (1805 - 1865) was die man wat bekend geword het vir sy werk oor kwaternione. Hy het gevind dat die sisteem van vektore baie beperk is. Hy het die behoefte gevoel om die kwosiënt van twee vektore te vind en verder vir enige twee vektore u en v met $v \neq 0$, wou hy 'n unieke vektor vind sodanig dat die vektorproduk qv gelyk sal wees aan u. Hamilton se werk het soveel aandag getrek dat daar regdeur die Westerse wêreld onsekerheid was of kwaternione nie die plek moet neem van vektore as die "everyday tool in physics and mathematics" nie. 'n Internasionale ondersoekgroep moes toe op die saak ingaan (Perlis, 1969: 295).

5. Samevatting

Daar is met groot omsigtigheid gekyk na die belangrikste elementêre grondbegrippe in die wiskunde. Dit is die volgende: die geheel/dele-relasie, oneindig-verdere verdeelbaarheid, die opeens-oneindige, totaliteit, omgewing – waaronder die idee van 'n limiet, topologie, gemiddeldes en die benadering van die reële getalle. Dan ook puntkontinuum en feitlike grootte, dimensies en dimensie-getal, differensiasie en integrasie en imaginêre getalseenhede. Dit het uit die hantering hiervan duidelik geword dat elkeen van hulle te doen het met die ontsluiting van die getals- of ruimteaspekte. Elke elementêre grondbegrip is dus 'n ante-of retrosipasie van of die getals- of ruimte- of kinematiese aspekte – dus 'n analogie.

Die identifisering van hierdie analogieë is ook in lyn met die aanvanklike fundamentele uitgangspunte dat elke werklikheidsaspek ondefinieerbaar is en dat as daar tot meerdere kennis van 'n bepaalde aspek gekom wil word, gebruik gemaak moet word van ander terme – dit is onder andere analogieë – om die aspek te beskryf. Uit die betrokke analogieë hierbo, blyk dit ook duidelik waarom van die metode van komplekse analise gebruik gemaak moes word om hulle te identifiseer. Die eie aard van getal en ruimte het dit vereis.

Deur die identifisering en hantering van hierdie elementêrste boustene van die wiskunde as sisteem is daar tot diepere en verdere insig gekom in dit wat wiskunde eintlik is. Die insig strek ook oor die aard van die vakwetenskap wiskunde, want deur middel van hierdie onderhawige analogieë is die uniekheid van en samehang tussen die getals- en ruimte-aspekte blootgelê. Dit is juis dan ook die eintlike studieterrein van die wiskunde. Dit lei uit die aard van die saak ook tot 'n sinvoller perspektief op die plek van wiskunde in die ry van wetenskappe, asook op die samehang wat bestaan tussen wiskunde en ten minste in hierdie stadium, die ander natuurwetenskappe.

Elke grondbegrip se wysgerige en vakwetenskaplike tuistes is aangedui en daar is ook ingegaan, soms breedvoerig, op die filosofiese diskoers (teoretiese divergensie) wat rondom elkeen bestaan kragtens die onderskeie uitgangspunte in die wetenskap.

'n Baie belangrike saak wat in 'n vorige[3] en hierdie opvolgende artikel uitgesorteer is, is die ontwikkeling van die kriteria waarmee in wiskunde-sillabusse die invloed van die grondbegrippe vasgestel kan word. Die kriteria is die volgende:

3 Wessels, D.C.J., 2006.

- Die eerste is die twee regulatiewe idees (skeppingsbeginsels), naamlik soewereiniteit in eie kring en universaliteit in eie kring (vorige artikel).
- Die tweede kriterium is die eiegeaardheid en volle betekenis van die getals- en ruimte-aspekte (vorige artikel), en
- die derde kriterium is die 13 geïdentifiseerde elementêre grondbegrippe (hierdie artikel).

Bibliografie

BAUMGART, J.K. 1969. The history of algebra. In: *Historical topics for the mathematics classroom*. (Thirty-first Yearbook of the NCTM). Washington. 233 - 294

BERNAYS, P. 1976. *Abhandlunqen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt.

BOYER, C.B. 1969. The history of calculus. In: *Historical topics for the mathematics classroom*.(Thirty-first Yearbook of the NCTM). Washington. 376 - 459.

EVES, H. & NEWSOM, C.V. 1965. *An Introduction to the Foundations and Fundamental Cocepts of Mathematics*. Rev. ed. New York: Holt, Reinhart & Winston.

EVES, H. 1971. *Mathematical circles revisited*. Massachusets: Prindle, Weber & Schmidt, Inc.

FÉLIX, L. 1966. *Modern mathematics and the teacher.* Cambridge: University Press.

HELLMICH, E.W. 1969. Complex numbers (The story of I-1). In: *Historical topics for the mathematics classroom* (Thirty-first Yearbook of the NCTM). Washington. 290 - 294.

HILBERT, D. 1925. On the infinite. In: *Philosophy of mathematics: selected readings* by Benacerraf, P. & Putnam, H. 1964. Oxford: Basil Blackwell.

KASNER, E. & NEWMAN, J. 1979. *Mathematics and the imagination*. Middlesex: Penquin Books Ltd.

PERLIS, S. 1969. Quaternions. In: *Historical topics for the mathematics classroom*. (Thiry-first yearbook of the NCTM). Washington. 295 - 298.

STAFLEU, M.D. 1980. *Time and again: A Systematic Analysis of the Foundations of Physics*. Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, DFM s.a. Ongepubliseerde Wysbegeerte Diktaat, WYS III. Bloemfontein: UOVS.

STRAUSS, D.F.M. 1969. *Wysbegeerte en Vakwetenskap*. Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, D.F.M. 1978. *Inleiding tot die kosmologie*. Bloemfontein: Sacum.

STRAUSS, D.F.M. 1986. The philosophy of the infinite. Onvoltooide manuskrip. Bloemfontein.

STRAUSS, D.F.M. 1988a. *Die grondbeqrippe van die sosiologie as vakwetenskap*. *RGN-ondersoek na navorsingsmetodologie, Navorsingsverslaereeks 8*. Pretoria: RGN.

STRAUSS, D.F.M. 1988b. *Enkele grondprobleme van en denkrigtings in die wiskunde*. Teks van voordrag in Pretoria voor die VCHO. Oktober, 13.

STRAUSS, D.F.M. 1991. The ontological status of the principle of the excluded middle. *Philosophia Mathematica*, II 6(1):73-90.

STRAUSS, D.F.M. 2001. Reductionism in mathematics: Philosophical reflections. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 37(1&2): 1-14.

STRAUSS, D.F.M. 2003. Voorvrae op weg na 'n "Christelike Wiskunde". *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 39(1&2): 137-154.

STRAUSS, D.F.M. 2003. Frege's attack on "Abstraction" and his defense of the "Applicability" of Arithmetic (as part of Logic). *South African Journal of Philosophy,* 22(1): 63-80.

STRAUSS, D.F.M. 2003. Is a christian mathematics possible? *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 39(3&4): 31-49.

STRAUSS, D.F.M. 2003. Voorvrae op weg na 'n "Christelike Wiskunde". *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 39(1&2): 137-154.

STRAUSS, D.F.M. 2005. Accounting for *primitive terms* in mathematics. *Koers,* 70(3):1-20.

STRAUSS, D.F.M. 2006. Systematic perspectives on diverging mathematical orientations. *Koers,* (70(4):631-659.

STRAUSS, D.F.M. 2005. The concept of number: Multiplicity and succession between cardinality and ordinality. *South African Journal of Philosophy*, 25(1): 27-47.

STRAUSS, D.F.M. 2006. Is a straight line the shortest distance between two points and does 2 + 2 equal 4? Manuscript.

WESSELS, D.C.J. 1982. Die deurwerking van die aritmetisisme in die wiskunde-onderrig op skool en die opvoedkundige implikasies daarvan. Ongepubliseerde M.Ed.-verhandeling. Bloemfontein: UOVS.

WESSELS, D.C.J. 1989. 'n Vakdidaktiese besinning oor die fundamentele invloed van grondbegrippe in die onderwys van wiskunde op skool. Ongepubliseerde D.Ed.-proefskrif. Pretoria: Unisa.

WESSELS, D.C.J. 1993. Die rol van analogieë en metafore as onderrigstrategieë in die onderwys van wiskunde. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap,* 29(1): 1-14.

WESSELS, D.C.J. 2006. Die uniekheid van getal en ruimte as grondslag vir besinning oor die elementêre grondbegrippe in die wiskunde. *Tydskrif vir Christelike Wetenskap*, Spesiale uitgawe 1: 245-267.