
Platonisme, konseptualisme en nominalisme in die versamelingsteorie

Heinrich Alt
Navorsingsgenoot
Departement Filosofie
Universiteit van die Vrystaat
heinricha64@gmail.com

Opsomming

In die eerste gedeelte van die artikel word verduidelik hoe die begrensde veranderlike die ontologie van die taalverbruiker veronderstel. Sou die veranderlikes strek oor konkrete objekte, dan het ons te doen met 'n nominalistiese standpunt. Wanneer waardes abstrakte objekte insluit, word 'n platonistiese standpunt ingeneem. Die artikel wys daarop dat nominalisme nie werklik kan afsien van sekere platonistiese gebiede nie.

In die ondersoek na die oorgang van predikaatletters na versamelingsleer, ontvang die predikate die status van veranderlikes wat klasse as waardes aanneem. Daar is dus 'n realiteit (universalia) agter taalvorme gepostuleer. Russell se antinomie kan hieruit afgelei word, maar word omseil deurdat klasse opgebou word volgens 'n sekere orde beginsel. In hierdie verband word konseptualistiese konstruktivisme betrek. Die konstruktivistiese sisteem Σ , 'n orde hieragie wat strek tot in die transfiniete, is 'n voorbeeld hiervan.

Die bestudering van platonisme, nominalisme en konseptualisme betrek die idee van die eindige, oneindige, sowel abstrak as konkreet. In die onderhawige artikel word hierdie grondleggende kwessies bespreek. Inleidende opmerkings sal ook gemaak word van iteratiewe modelle in die versamelingsleer. Die artikel kom onder meer tot die konklusie dat die Christelike filosofie die weg baan om versamelingsteorie te beskou

as 'n verdiepte getalsteorie, min of meer in lyn met Kanamori se siening dat versamelingsteorie 'n “open-ended framework for mathematics” is (Kanamori, 2007:52).

Abstract

Platonism, Conceptualism and Nominalism in the set theory

In the first part of the article I explain how the bounded variable assumes the ontology of the language user. If the variables extend over concrete objects, we are dealing with a nominalistic point of view. When values include abstract objects, a platonistic stance is taken. The article points out that nominalism cannot really give up on some platonistic areas.

In the investigation into the transition from predicate letters to set theory, the predicates receive the status of variables that adopt/accept classes as values. A reality (universals), therefore, is postulated behind forms of language. Russell's antinomy may be deduced from this, but is evaded by classes being constructed according to a specific principle of rank. In this regard conceptualistic constructivism is involved. The constructivist system Σ , a ranking hierarchy that reaches into the transfinite, is an example of this.

Studying Platonism, nominalism and conceptualism involves the idea of the finite and the infinite, abstract as well as concrete. In the present article these fundamental issues are discussed. Introductory remarks will be made regarding iterative models in the set theory. Inter alia the article reaches the conclusion that the Christian philosophy smooths the way to regard the set theory as a deepened numerical theory, more or less in line with Kanamori's viewpoint that the set theory is an “open-ended framework for mathematics” (Kanamori, 2007:52).

Inleiding

Die onderskeid tussen die begrippe *abstrak* en *konkreet* gee aanleiding tot die onderskeid tussen platonisme en nominalisme. Beide platonisme en nominalisme veronderstel algemene eienskappe (“properties”), maar hierdie

enskappe word op verskillende wyses gekontekstualiseer: “Platonism takes them for names that refer to ‘abstract ideal objects’, whereas nominalism considers them to be ‘syncategorematic’ statements ...” (Strauss, 2009:437). Quine se opmerking “to be is to be the value of a bound variable” dui op die begrensde veranderlike wat ’n denker gebruik as sy/haar ontologiese aanname.

Die oorgang van predikaatletters na die versamelingsleer gee daartoe aanleiding dat predikate ook die status van veranderlikes wat klasse as waardes aanneem ontvang. Daar word ’n realiteit agter die “taal vorme” gepostuleer. In die klassieke wiskunde word bogenoemde beskrywende teorie as grondslag geneem. In hierdie geval word die logika van klasse as die fundering van wiskunde aanvaar, maar die probleem is dat Russell se antinomie hieruit afgelei kan word.

In hierdie artikel word voorts ondersoek ingestel na wat die begrip *konstruktivistiese konseptualisme* behels. Volgens die konstruktivis bestaan die oneindige op geen ander wyse as bloot die moontlikheid om altyd verdere konstruksies tot gevolg te hê nie. Dit bring ons by die konstruktivistiese sisteem Σ van Hao Wang. ’n Belangrike kenmerk van die sisteem is dat die orde-hierargie gekontinueer word tot in die gebied van die transfiniete. Hierdie sisteem berus ook op ’n iterasie tegniek – wat ook inleidend verduidelik sal word.

Volgens Strauss (2009:438) het die abstrak-konkreet onderskeid betrekking op die dimensie van entiteite en modaliteite. Konkrete objekte verwys na die entiteitsdimensie terwyl abstrakte objekte na die modale dimensie van die werklikheid verwys. Die onderliggende rol van die modale aspekte is ook prominent, veral wat die getal- en ruimte-aspekte betref. Die getalsaspek vind byvoorbeeld neerslag in die gebruik van ’n primitiewe term soos “menigvuldigheid” (“multitude”) om die iteratiewe model te beskryf.

Daar sal eerstens gefokus word op kwantifikasie en op die wyse waarby nominalisme en platonisme daarby betrek word. Daarna word die oorgang van predikaatletters na die versamelingsleer ondersoek. Laasgenoemde veronderstel dan ’n ondersoek na Russell se antinomie en die wyses waarop die antinomie moontlik deur ’n konstruktivistiese teorie vermy kan word. Hao Wang se konstruktivistiese sisteem Σ word bespreek tesame met die iteratiewe model. Onderliggend word gepoog om aan te dui hoe begrippe uit die Christelike wysbegeerte gebruik kan word om hierdie versamelingsteoretiese kwessies te analiseer.

Kwantifikasie

Teenoor die platonisme, wat predikaat-uitdrukkings (wat gebruik word om relasie- en eienskapstellers uit te druk) konstrueer as name van ideale abstrakte objekte, konstrueer die nominalisme predikate as sinkategorematisiese uitdrukkings wat slegs betekenis binne 'n konteks besit. So kan die predikaat “mens” gekonstrueer word as 'n oop sin, naamlik, “ x is 'n mens” – wat die oop veranderlike x bevat. Hierdie oop sin het as sodanig geen betekenis nie. Dit verkry slegs betekenis as die veranderlike x vervang word met 'n konkrete individu soos byvoorbeeld: “Sokrates is 'n mens”. Dit kan ook betekenis verkry deur veranderlikes te bind deur een van die kwantore, naamlik, “vir alle x ” ($\forall x$) of “daar is 'n x ” ($\exists x$), te gebruik, sodat 'n universele of 'n eksistensiële sin verkry word, soos byvoorbeeld: ($\forall x$) (x is 'n mens) of ($\exists x$)(x is 'n mens). Die eersgenoemde sin is vals en die tweede een waar.

Vir die nominalis is slegs volledige sinne betekenisdraend. Predikate is slegs fragmente van sinne (oop sinne) en kan slegs betekenis hê in 'n indirekte afgeleide wyse. Die rede hiervoor is dat hulle in sinne omskep kan word wat slegs in hulself betekenisvol is. Wanneer foutiewe konklusies gemaak word rondom betekenis, bv. deur dit te Koppel aan ‘objekte’ van benaming of om linguïstiese faktore ten toon te stel wat 'n eksplisiete ontologiese voorveronderstelling manifesteer, moet daar eerder gekyk word na uitdrukkings wat in 'n presiese taal woorde bevat soos “daar is” en “vir alle” wat aangedui kan word deur die kwantore “($\exists x$)” en “($\forall x$)”, d.w.s. na kwantore wat voor sinne geplaas kan word waarin die genoemde veranderlikes voorkom. Die veranderlike “ x ” is begrens deur 'n eksistensiële of universele kwantor. Hierdie begrensde veranderlike dui eksplisiet op die ontologie wat die taalgebruiker veronderstel. Die rede hiervoor is dat daar 'n domein van waardes neergelê moet word vir elke veranderlike wat in die taal gebruik word. Sou die veranderlikes eksklusief strek oor konkrete objekte, d.w.s. individuele veranderlikes, word 'n nominalistiese standpunt ingeneem. Wanneer daar ook in die taal veranderlikes voorkom waarvan die waardes ‘abstrakte objekte’ insluit, soos bv. klasse, eienskappe, relasies, getalle, funksies en proposisies, word 'n platonistiese standpunt ingeneem.

Wat ontologies beslissend is, is die begrensde veranderlike en nie die linguale vorm wat hierdie begrensde veranderlike mag aanneem nie.

Die onderskeid tussen platonisme en nominalisme kan gekarakteriseer word met behulp van die onderskeie linguale uitdrukkingswyses wat deur hierdie twee sisteme begruik word. 'n Nominalistiese sisteem maak byvoorbeeld van die volgende spreekwyse gebruik:

-
- (1) individuele veranderlikes “x”, “y”, ... Konkrete objekte behoort tot hierdie domein behoort.
 - (2) algemene predikaatuitdrukkings “P”, “Q”, ... en inderdaad een-plek sowel as meer-plek-predikate wat die konstruksie van eienskappe en relasionele stellings moontlik maak;
 - (3) alle soorte logiese konstantes soos “nie”, “en”, “of”, en “as ... dan”. Dit maak die vorming van 1-‘waarheidsfunksionele sententiële kompaktheid’ moontlik.
 - (4) kwantore soos “ $(\forall x)$ ”, “ $(\exists x)$ ” maak dit moontlik om algemene stellings oor individue van die domein te konstrueer.

Wat belangrik is, is dat wat ookal in die nominalistiese sisteem gebruik word, ook in die platonistiese sisteem bruikbaar is. Laasgenoemde maak ook gebruik van veranderlikes wat strek oor abstrakte objekte soos klasse, eienskappe, relasies, ens. Die begrensde veranderlike van ’n teorie deurloop alle entiteite waaroor die teorie handel. Die stelling dat die klassieke wiskunde universalialia behandel, beteken dan eenvoudig dat die klassieke wiskunde universalialia as waarde vir hul begrensde veranderlikes voorveronderstel (Quine, 1978:85, 86). Wanneer ons byvoorbeeld sê “ $(\forall x)(x \text{ is 'n priemgetal en } 5 < x < 11)$ ”, dan sê ons dat daar iets is wat ’n priemgetal is en dat hierdie priemgetal tussen 5 en 11 lê. In feite gaan dit om die getal 7 – ’n stelling wat op universaliteit aanspraak maak. Wat in hierdie kwantifikasie teorie deurslaggewend is, is dat die veranderlikes klasse as waardes aanneem.

Die nominalisme aanvaar slegs ’n platoniese geformuleerde konteks as dit vertaal kan word in ’n nominalistiese taal. Dit beteken egter nie dat die nominalisme alle gebruik van veranderlikes vir abstrakte objekte in ons wetenskaplike en nie-wetenskaplike redenasies uitskakel nie. Platonistiese taal wat in nominalistiese konteks oorgeskryf kan word, is sinvol en word beskou as ’n “façon de parler” oftewel afkortings. Voorbeelde van sulke vertalings sluit stellings in oor klas insluiting: Die stelling “Die klas van manne is ’n deelklas van die klas van lewende dinge” kan nominalisties vertaal word as “alles wat ’n man is, is ’n lewendige ding”. “Alles” verwys hier na ’n domein van konkrete objekte en woorde soos “man” en “lewendige ding” word beskou as sinkategoremiese predikaat-uitdrukkings en nie as objekte van name nie (Stegmüller, 1977a:33).

’n Ander voorbeeld is die identifisering van die ononderskeibare, naamlik die behandeling van verskeie “objekte” wat identies is met mekaar en wat ononderskeibaar binne die teorie geformuleer word, dan is dit moontlik om ’n teorie van individue as ’n teorie van universalialia te konstrueer. ’n Voorbeeld hiervan is die teorie van lengtevergeelyking. Gestel ons wil entiteite

met betrekking tot hul lengte vergelyk. Die waardes van die begrensde veranderlikes is “fisiese objekte” en die enigste predikaat is “L” waar “Lxy” beteken “x is langer as y”. Dit kan soos volg gestel word: Gestel “ $\sim Lxy$ & $\sim Lyx$ ” geld, dan geld elke ware uitspraak oor wat die teorie vir x maak, ook vir y en omgekeerd. Daarom kan “ $\sim Lxy$ & $\sim Lyx$ ” as “y = x” beskou word. Nou is die waardes van die veranderlikes nie meer fisiese objekte nie, maar universalia, naamlik (die eienskap) lengte. Hierdie metode van abstrahering van universalia is versoenbaar met die nominalisme wat in werklikheid geen universalia toelaat nie. Weliswaar kan die behandelde universalia bloot as ‘n manier van praat gesien word. Dit is te danke aan die metaforiese gebruik van die identiteitstekens vir gegewens wat nie werklik identies is nie, maar wat bloot voorbeelde is vir “lengte-ooreenkoms”.

Ander voorbeelde van teorieë wat hierby betrek kan word, is die teorie van inskripsies en die teorie van attribute.

Sodanige herformuleringe is egter nie altyd moontlik nie. Deur middel van die identiteit van die ononderskeibare, formuleer die abstraksie die ooreenkomstige in ‘n individue-sisteem op ‘n nuwe manier. Hierdie werkwyse het egter beperkinge. Dit kan nie verder gaan as om wedersyds uitsluitende klasse te abstraher nie. Daar word nie ruimte gelaat vir die snyding (deursnee) van twee willekeurige klasse nie (Quine, 1953:117, 118).

Die beperkte uitdrukkingsmoontlikhede van die nominalisme kan duidelik gedemonstreer word in die predikate wat die “ouer” en “voorganger” konsepte verteenwoordig. Alhoewel die twee predikate “ouer van” en “voorganger van” in ‘n nominalistiese sisteem ingelyf kan word, kan hierdie definisie net bereik word deur ‘n platonistiese ompad. Die moontlike oplossing van hierdie probleem lê in ‘n dienooreenkomstige uitbreiding van die konsep van ‘n konkrete ding, aangesien die domein van objekte wat ons dinge noem nie duidelik omskryf kan word nie. Indien ons aanvaar dat dinge bestaan uit “stukkies” wat willekeurig versprei word oor ‘n tydruimtelike heelal, kan alle teenwoordige, toekomstige en reeds bestaande rooi dinge byvoorbeeld gekonstrueer word as werklike komponente van ‘n grootste enkele rooi ding in die tydruimtelike heelal. Die woord rooi kan gebruik word as die naam van hierdie konkrete “objek”. In hierdie geval het die nominalisme probeer om alle universalia deur dienooreenkomstige konkrete geheelhede te vervang. Deur die platonistiese idee van ‘n klas-elementskap word ‘n nominalistiese geheel-dele relasie gesubstitueer. Hierdie pogings het egter ook tekortkominge. Die probleem van die nominalistiese konsep van ‘n ding word duidelik geïllustreer deur Quine se meetkundige voorbeeld. Ons gaan egter nie hierop in nie. Die probleem kom daarop neer dat “... to

one and the same whole several non-identical classes can be correlated, whereas this whole cannot be identified with different concrete aggregates which are not identical with each other" (Stegmüller, 1977a:39). Dit is ook die rede waarom die nominalistiese definisie van "voorouerskap" nie werk vir 'n willekeurige twee-plek relasie R nie. Die klaskonsep moet nie verwar word met 'n konkrete geheel nie. Dit geld wanneer veronderstel word dat die konsep van 'n klas aanvaar word. Die sogenaamde "a priori nominalisme" sal dit nie aanvaar nie, maar Stegmüller reageer soos volg hierop: "Against all such nominalist objections there is no other choice but to point out that in science as well as in everyday life we are always de facto forced to resort to platonistic formulations which till now have strongly resisted translation into a language constructed according to the nominalistic recipe (Stegmüller, 1977a:39). Die vraag is ook of die nominalisme bereid is om volkome af te sien van hierdie platonistiese gebiede, want die gevolge daarvan is onder meer die verwerping van die (wiskundige) versamelingsteorie. Dit bring ons by die volgende punt van bespreking: Watter rol speel die platonisme in die wiskunde en die logika?

Die twee hoofvelde van die logika, naamlik die teorie van waarheidsfunksies (proposisionele logika) en die kwantifikasieteorie (die eerste orde predikaatlogika) word hoofsaaklik platonisties aangebied. Die simbole van die proposisionele logika 'p', 'q' ..., word "sentensieuse" of proposisionele veranderlikes genoem, terwyl simbole van die kwantifikasieteorie 'F', 'G', ..., predikaatveranderlikes genoem word. Elke operasie met veranderlikes voorveronderstel 'n gespesifiseerde domein. In 'n ekstensionele siening bestaan die domein in die eerste geval uit die waarheidswaardes "waar" en "vals" en in die tweede geval uit klasse. Indien intensies in berekening gebring word, dan bevat die domein van intensionele waardes proposisies in die eerste geval en attribute (eienskappe en relasies) in die tweede geval. Platonisme is dus ter sprake in beide gevalle. Wanneer die simbole egter gekonstrueer word as skematiese letters wat tesame met die logiese konstantes en kwantore die struktuur van enige stelling weerspieël, dan kan die nominalisme met beide gevalle geassosieer word. Wanneer so 'n metode gebruik word, kan abstrakte essensies soos "swartheid" en "gansheid" in die sin "daar is swart gans" (d.i. " $(\exists x)(x \text{ is 'n gans en } x \text{ is swart})$ ") nie gepostuleer word nie. 'n Verdere probleem in 'n platonistiese konstruksie van die kwantifikasieteorie is dat die onbepaalde aanvaarding van die beginsel dat "enige kondisie wat op x geplaas word", aanleiding gee tot antinomieë. Dit het aanleiding gegee tot die konstruksie van teorieë waarin die formule Fx enige kondisie op enige plek x verteenwoordig, maar geld nie vir die platoniese stelling x element van F nie.

Die gaping tussen die nominalisme en die platonisme is egter nie altyd so wyd nie. Quine wys daarop dat die oorgang van die nominalisme na die platonisme plaasvind wanneer die predikaatlogika deur die invoering van die kwantore “ $(\forall x)$ ” en “ $(\exists x)$ ” uitgebrei word sodat die veranderlikes nie meer as skematiese letters gesien word nie. In plaas hiervan moet veranderlikes gesien word as toepaslike entiteite wat waardes aanneem, waarvan die name die uitsprake is. Hierdie entiteite kan as proposisies beskou word of, wanneer Frege se beskouings as uitgangspunt geneem word, as waarheidswaardes (Frege, 1979:119). Proposisies met gelyke waarheidswaardes is ononderskeibaar. In hierdie geval is ’n teorie met universalia of abstrakte objekte onvermydelik, ongeag of dit handel oor proposisies of oor waarheidswaardes. Ook hierdie voorbeeld van abstraksie is versoenbaar met die nominalisme. Nogtans word ’n kwantifiserende linguïstiese stelling wat proposisies of waarheidswaardes noodsaak gevolglik vanuit nominalistiese standpunt as ’n blote wyse van praat geregverdig.

Waarmee rekening gehou moet word, is dat die abstraksie deur die verbinding van skematiese letters nie volledig verenigbaar is met die nominalisme nie. Wanneer ons die skematiese predikaatletters van die predikaatlogika bind, word die universalia in daardie proses “verdinglik”. Hierdie universalia is entiteite waarvan die name deur predikate aangedui word en kan as klasse of as attribute opgeneem word. Dit is klasse wat deur die strategie van die identifisering van die ononderskeibare uitgekies word (Quine, 1978:89, 90).

Die oorgang van predikaat-letters na die versamelingsleer

In die ondersoek na die oorgang van predikaat-letters tot die versamelingsleer, is ’n eksplisiete formulering van die predikaat-logika belangrik.

Die volgende aksioma-skema kan hiervoor as grondslag dien:

$$A1. (\forall x)(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow ((\forall x)Fx \rightarrow (\forall x)Gx)$$

$$A2. p \rightarrow (\forall x)p$$

$$A3. (\forall x)Fx \rightarrow Fy$$

Die implikasie van bogenoemde aksioma-skema is dat die predikate ook die status van veranderlikes wat klasse as waardes aanneem, ontvang. Dit impliseer dat ’n wêreld van universalia aanvaar word – wat beteken dat daar ’n realiteit agter die “taal vorme” gepostuleer word.

Die klassieke wiskunde neem bogenoemde beskrywende teorie as grondslag – indien ons 'n logika van klasse as die fundering van die wiskunde aanvaar. Hierdie *ad hoc*-struktuur besit weliswaar geen intuïtiewe basis nie. Die probleem is teweens dat Russell se antinomie hieruit afgelei kan word. Konsistensie word egter herstel deur een of ander begrening. 'n Bekende begrening is die tipe teorie wat Russell in sy *Principia Mathematica* ontwikkel het (Russell :37-65). Universalialia word steeds veronderstel, wat beteken dat die gepostuleerde klasse dan al die universalialia verteenwoordig wat die wiskunde nodig het. Die getalle, soos Frege aangedui het, word as klasse van klasse gedefinieer. Relasies, soos Wiener aangedui het, word ook as klasse van klasse gedefinieer. Funksies is, soos Peano aangedui het, relasies.

Volgens Russell se klasselose teorie word uitdrukkings wat klasse voorveronderstel egter in 'n konteks gedefinieer wat tot gevolg het dat die heenwysing na die klasse verdwyn. Hoewel sy metode klasse elimineer, word dit vervang deur nog 'n abstrakte universele entiteit – die sogenaamde proposisie-funksie. Laasgenoemde word op 'n meerduidige wyse gebruik; aan die een kant dui dit op 'n oop sin, dit wil sê sin-tipe uitdrukkings wat vrye veranderlikes bevat. Aan die ander kant word dit ook gebruik in die sin van attribute (intensies) wat dan aanleiding gee tot die isolering van klasse. Universalialia word egter nie uitgeskakel nie. Daar vind eerder 'n reduksie van een soort “universal” na 'n ander soort “universal” plaas en klasse word gereduseer tot attribute. In 'n ekstensionele sisteem soos die *Principia Mathematica* word niks bereik deur ekstensies tot intensies te reduseer nie. Quine verkies gevolglik om die teorie van attribute eerder te reduseer tot 'n teorie van klasse. Universalialia word teruggevoer na klasse van attribute. So 'n terugvoering is egter sinloos, aangesien die grondliggende teorie van die attribute eerder as versamelingsleer beskou sal word – in ooreenstemming met die strategie van die identifisering van die ononderskeibare (Quine, 1978:94; Stegmüller, 1977a:43).

In die voorstelling van die grondlegging van die wiskunde as klasse-logika word die skematiese predikaatletters van die predikaatlogika as gebonde klasse-veranderlikes behou om aan te dui hoe die binding van hierdie skematiese letters tot platonisme in die wiskunde aanleiding kan gee. Dit is egter beter indien die skematiese karakter van hierdie letters op so 'n wyse gefalsifiseer word, sodat dit in ander letters oorgaan. Ons wil daarom 'x', 'y' met positiewe heeltallige nommers as ons klas-veranderlikes benut. Letters sonder hierdie nommers kan dan as individuele veranderlikes benut word. Die skematiese letters 'F', 'G' kan vir werklike skematiese gebruik betrek word soos in die formulering van aksiomas A.1-3 en die verdere reëls wat

die behandeling van die kwantore reël; sulke letters gebruik geen nommers meer nie. Ten spyte hiervan word Reël 6 (R6) nogtans aangeneem sodat A 1-3 en R1-5 veranderlikes 'x', 'y' met willekeurige nommers toegelaat word. A1-3 en R1-5 word dus as A'. 1-3 en R'. 1-5 gerekonstrueer. 'n Verdere aksiomatiese skema kan toegevoeg word, naamlik klasse-abstraksie, wat as A'4 aangedui word:

$$A'.4. \exists y^{n+1} \forall x^n (x^n \in y^{n+1} \rightarrow Fx^n).$$

Die noodwendigheid van hierdie skema spruit voort uit die tipografiese differensiering tussen klasveranderlikes en skematiese predikaat-letters. Nog 'n aksioma-skema het betrekking op ekstensionaliteit, nl:

$$A'5. \forall x^n (x^n \in y^{n+1} \rightarrow x^n \in z^{n+1}) \rightarrow (y^{n+1} \in w^{n+2} \rightarrow z^{n+1} \in w^{n+2}).$$

Hierdie aksioma vereis dat die veranderlikes klasse as waardes aanneem en nie attributte nie.

Alhoewel nominalisme nie in alle opsigte van platonisme verskil nie, is dit hier waar die onderskeid duidelik na vore kom. Platonisme is eerder 'n uitbreiding van nominalisme in die sin dat die platonisme "abstrakte objekte" as veranderlikes aanvaar. Die konkrete en die abstrakte is dus onderliggend aan die onderskeiding ten opsigte van die kernprobleem, naamlik of daar tesame met die gegewenheid van individue ook toegegee moet word aan die idee dat daar klasse van sodanige individue bestaan. Ten slotte gaan dit om die vraag of daar slegs van 'n uniforme soort veranderlikes gebruik gemaak moet word, naamlik individuele veranderlikes, en of daar bykomend gebruik gemaak moet word van klasse veranderlikes, of selfs klasse van klasse van veranderlikes, of van klasse van klasse van klasse van veranderlikes, ens. (Stegmüller, 1977a:5, 6).

Wanneer klasse gekwantifiseer word, kan daar verder onderskei word tussen begrensde kwantifikasie en onbegrensde kwantifikasie. Begrensde kwantifikasie maak gebruik van die kwantor " $\forall x^1$ " wat beteken: "vir alle klasse x_1 van individue" of "vir alle x_1 van die eerste tipe". Ooreenkomstig hieraan beteken " $\forall x^2$ ": "vir alle klasse x^2 van individue" of "vir alle klasse x^2 van die tweede tipe". Indien kwantore gebruik word waarvan die omvang oor klasse begrens is, sal dit nie meer as k elemente besit nie. Hiervoor word die skryfwyse " $\forall_k x^n$ " gebruik, wat dan beteken: "vir alle klasse x^n van die n -de tipe wat nie meer as k elemente besit nie". Dit is belangrik om daarop te let dat wanneer $n=1$ is vir elke vaste k , klasse veranderlikes volledig ontbreek in die definiëring van die kwantifisering. Onbegrensde kwantifikasie veronderstel 'n basis van eindig veel materiële "objekte" – d.i. kleiner as die eindige getal t waarvolgens alle klasse van individue dan hoogstens oor t elemente en

" $\forall_t x$ " die werking van onbegrensde kwantore " $\forall x^1$ " oor klasse van individue aandui. Die volgende kan hieruit afgelei word:

D5. $\forall x^1 \leftrightarrow \text{df } \forall x^1$

Bogenoemde kan nou met 'n hoër indeks geskryf word – vir t skryf ons $t_1 (=2^1)$. Dit lewer 'n onbegrensde kwantor " $\forall x^{2n}$ " oor klasse van die tweede tipe waar hierdie klasse nie groter as t_1 is nie. Die indekse kan verder verhoog word. Hierdie proses kan oneindig voortgesit word en gee uiteindelik aanleiding tot die kwantor " $\forall x_n$ " vir elke willekeurige n. Tesame met D5. is daar egter ook die behoefte na 'n aksioma wat aandui dat daar nie meer as t individue betrokke is nie:

A8: $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_t \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee \dots \vee y = x_t)$.

"t" in A8 kan deur 'n getal vervang word sodat die ellips "... " gevul kan word.

Die hele sisteem kan gesien word as 'n soort afkorting wat die nominalisme kan aanvaar.

Dit bring die teoretikus by die vraag na die eis wat deur die oneindighedsaksioma (in die aksiomatiese versamelingsteorie) na vore kom, naamlik dat daar oneindig veel individue moet wees. Wanneer hierdie oneindighedsaksioma nie aanvaar word nie, duik daar 'n probleem op met betrekking tot talle wiskundige gegewens. Die negatiewe aspekte is weliswaar nie so groot nie, aangesien die voorgegewe grense vir die rye van die heelgetalle oorskry word waar daar dan tot 'n hoër tipe gestyg kan word. Dit is daarom opvallend dat Russell en Whitehead elke aksioma as "voorlopig" behandel en dit steeds as eksplisiete hipotese aanvoer – waar dit werklik gebruik word.

'n Verdere feit wat in oënskou geneem moet word, is dat 'n logika wat met 'n nominalistiese benadering verenigbaar is, slegs moontlik is as die spekulatiewe fisiskalistiese hipotese (soos geformuleer in A.8) aangeneem word. Dit is nie veel beter as 'n logika wat nie met die nominalisme verenig kan word nie. Sommige voorstanders van die nominalisme vind hierdie reduksie van die platoniese logika onaanvaarbaar aangesien daar, volgens hulle, nie genoeg materie in die ganse tyd-ruimte vir A.8 of die uitgeskryfde vorm van " $\forall x_1 Fx_1$ " bestaan nie (Quine, 1978:100).

Wang het ook 'n probleem met Goodman se assosiering van die nominalisme met die verwerping van die oneindige. Die rede waarom Goodman hierdie assosiasie gemaak het, het te doen met die feit dat indien 'n eindige aantal dinge gepostuleer word, daar nie 'n probleem vir nominalisme ontstaan om van klasse te praat nie. Indien die oneindige egter ter sprake kom, gee

Goodman self toe dat die filosofiese en intuïtiewe voordeel van sy analise (“calculus”) van individue ineenstort. Daarom kan die nominalisme nie werklik die oneindige aanvaar nie. Tog wys Wang daarop dat in die analise van individue daar ruimte gelaat word vir ’n oneindige aantal postulate en dat in die verstaan van ’n spesifieke postulaat die gebruik van die oneindige veronderstel word (Wang, 1951:48-49, 108).

Op hierdie stadium moet daarop gewys word dat Quine voorkeur daaraan gee dat attribute, funksies, relasies en getalle tot klasse gereduseer moet word. Die onderskeiding tussen abstrak en konkreet kan teruggevoer word tot die onderskeiding tussen individu en klas (Quine, 1992:5). Nominalisme beteken dus die reduksie van klasse na individue. Dit is duidelik dat die universaliteitsprobleem sodoende gereduseer word tot probleme in die versamelingsteorie. Merkwaardig genoeg word daar nie dieper gedelf in die vraag na wat uiteindelik die verskillende aksiomas in die versamelingsteorie kondisioneer en onderlê nie. Op hierdie punt is daar raakpunte met Strauss se teoretiese beskouing, naamlik dat die strukturele interrelasies tussen getal en ruimte inderdaad die basis is vir die verskillende aksiomatiese sisteme (Strauss, 1994a:159).

Platonisme en konseptualisme

Hierdie deel van die bespreking begin met ’n vermelding van Russell se antinomie en gee dan ’n oorsig van die konseptualistiese oplossing daarvan. In hierdie antinomie word die volgende as uitgangspunt geneem: “on construing certain entities as incapable of membership” (Quine, 1958:vii). ’n Verbandhoudende vraag wat hier ter sprake kom, is die vraag na die wyse waarop daar in die konteks van ’n teorie, ’n skakeling met klasse kan wees. Indien die klas eindig is en dit nie te veel elemente bevat nie, kan elke enkele klas volledig beskryf word deur die elemente daarvan te bestudeer. Indien die klas egter ’n groot aantal elemente besit (bv. alle sterre van die heelal of al die watermolekules in ’n dam), is dit nie moontlik om die klas van elemente teoreties te beskryf deur middel van die bestudering van die elemente daarvan nie. Dieselfde geld vir klasse met ’n oneindige aantal elemente (bv. al die priemgetalle). Om hierdie probleem te omseil, kan daar dan gesoek word na ’n gedefinieerde kondisie vir die klas onder bespreking. In plaas van die hantering van ’n oneindige ontoeganklike klas, word die gedefinieerde kondisie daarvan hanteer. So ’n kondisie kan uitgedruk word deur die oop sin “Fx” waarin “x” as ’n onafhanklike veranderlike optree. ’n Klas α kan dan bepaal word deur die kondisie “Fx” as en slegs as die volgende stelling geld:

$$(1) (\forall x)(x \in \alpha \equiv Fx)$$

Bogenoemde beteken die volgende: 'n Objek x is 'n element van die klas α as en slegs as " Fx " geld. Ten einde 'n volledige algemene aanwending van hierdie prosedure moontlik te maak, moet die volgende beginsel behou word: dit maak nie saak watter kondisies " Fx " gekies word nie, daar is altyd 'n klas α wat die relasie het (wat beskryf word deur (1)) tot " Fx ". Daarom kan die volgende stelling aanvaar word:

$$(2) (\exists \alpha)(\forall x)(x \in \alpha \equiv Fx)$$

Bostaande stelling is van toepassing op enige substitusie in oop sinne met die onafhanklike veranderlike " x " in die plek van " Fx ". Hierdie beginsel van klas-abstraksie lei egter tot teenstrydighede en word waargeneem wanneer Russell se kondisie " $\sim(x \in x)$ " in die plek van " Fx " gesubstitueer word. Hierdie kondisie word egter wel bevredig deur die meeste "objekte", bv. die klas van stoele is self nie 'n stoel nie. Net so is die klas van ewe getalle nie 'n getal nie, dit wil sê: indien G die klas van ewe getalle is, geld die kondisie " $\sim(G \in G)$ ". Indien F die klas van stoele is, geld die kondisie " $\sim(F \in F)$ ". Wanneer " $\sim(x \in x)$ " gesubstitueer word in " Fx " in (2) en " x " (op grond van die konklusie wat afgelei word vanuit die "alles" na 'n enige individuele instansie) vervang word met " α ", kan die antinomie soos volg geformuleer word.

$$(3) (\exists \alpha)(\forall \alpha)(\alpha \in \alpha \equiv \sim(\alpha \in \alpha))$$

Die manier waarop hierdie antinomie omseil kan word is deur klasse suksesvol te bou volgens 'n sekere orde beginsel. Individue ontvang die orde 0, klasse van individue ontvang die orde 1, klasse van klasse van individue die orde 2, ens. So 'n konstruksie van 'n klashiërgie voorveronderstel 'n aanpassing van die beginsel van klas-abstraksie (2). Die vereiste is dat die klas α van 'n orde hoër moet wees as " x " en dat al die begrensde veranderlikes in " Fx " 'n laer orde as α moet hê. Hierdie ordes moet nie in 'n eksklusiewe sin opgeneem word nie, maar in 'n stygende opgehoopde sin sodat elke klas (of elke veranderlike wat klasse verteenwoordig) van orde n ook al die ordes groter as n het. Voorts moet die hersiening van die beginsel van klas-abstraksie voorsien word deur 'n beperking op die aksioma wat die konklusie van die "alles" tot enige individuele instansie toelaat en wat byvoorbeeld die volgende vorm besit:

$$(4) (\forall x)(Fx \rightarrow Fy)$$

'n Belangrike vereiste is dat die orde van ' y ' nie die orde van ' x ' oortref nie. Laasgenoemde word gemotiveer deur die feit dat, as gevolg van die toeskrywing van ordes aan klasse, die waardes van y , indien hulle die orde

k bevat, slegs kan val onder die waardes van x wat die orde j het as $j \geq k$.

Daar is nog 'n vereiste wat geregverdig moet word. Dit het betrekking op die begrensde veranderlike binne die formule " Fx " wat nie die orde van α het nie. Dit is nou verbonde aan die sogenaamde impredikatiewe definisies. Hierdie soort definisies word aangetref wanneer 'n klas aangedui word deur die verwysing na 'n totaliteit waarin die betrokke klas self opgeneem is. Vir die konstruktivis is laasgenoemde teenstrydig. Impredikatiewe definisies gee aanleiding tot antinomieë. Bogenoemde afgegrensde kondisies konstitueer egter 'n formulering wat noukeurig genoeg is om impredikatiewe definisies uit te skakel. Veronderstel dat daar binne " Fx " 'n begrensde veranderlike is, sê " (β) ", wat van dieselfde orde n is as die klas α wat gekonstrueer word. Die waardes van die kwantor " (β) " sal dan alle "objekte" van orde " n " insluit, in besonder die klas α wat gekonstrueer is. Die sirkel word dus vermy deur addisionele stipulasies op begrensde veranderlikes.

Deur gebruik te maak van hierdie konstruktivistiese teorie kan Russell se antinomie vermy word. Vir elke orde " n " kan die klas van al daardie van orde " n " wat hulself nie as elemente bevat nie, gekonstrueer word. Die volgende stelling kan geformuleer word:

$$(5) (\exists \alpha^{n+1})(\forall x^n)[x^n \in \alpha^{n+1} \equiv \sim(x^n \in x^n)]$$

Die klas wat op hierdie wyse gestipuleer word, is self van die orde $n+1$, en die vraag of dit 'n element van homself is al dan nie, gee nie aanleiding tot enige teenstelling nie. Let daarop dat die volgende teenstellende stelling nie vanuit (5) afgelei kan word nie:

$$(6) (\exists \alpha^{n+1})[\alpha^{n+1} \in \alpha^{n+1} \equiv \sim(\alpha^{n+1} \in \alpha^{n+1})]$$

Vir so 'n afleiding is die volgende formule nodig:

$$(7) (\forall x^n)[x^n \in x^{n+1} \equiv \sim(x^n \in x^n)] \rightarrow [\alpha^{n+1} \in \alpha^{n+1} \equiv \sim(\alpha^{n+1} \in \alpha^{n+1})]$$

Dit is egter duidelik dat die stelling (7) nie versoenbaar is met die geformuleerde beperking op die reël " $(\forall x)(Fx \rightarrow Fy)$ " nie. Vanuit die geldigheid van 'n stelling vir alle x van orde n , kan die geldigheid van 'n objek van orde $n+1$ nie aflei word nie.

Uit die voorgaande is dit reeds duidelik dat daar sprake is van 'n konstruktivistiese konseptualisme wat gekarakteriseer word deur die vereiste dat die gedefinieerde kondisies vir klasse sekere beginsels van konstruksie moet bevredig. Daar is deurlopend gewys op die gedefinieerde kondisie van 'n klas wat juis 'n konstruktivistiese terminologie voorveronderstel.

Hierteenoor sal 'n platonistiese sienswyse wil hê dat die formulering van 'n kondisie en die aanwending van die beginsel (2) tot hierdie kondisie geensins beteken dat 'n klas α deur 'n definisie geskep word nie; daar is eerder 'n klas gekies uit die onafhanklike bestaande totaliteite van klasse deur middel van die kondisie "Fx". "Gedefinieerde kondisie" word nou vervang deur "kondisie van keuse". 'n Streng Platonis sal verder ook geen probleem hê met "impredikatiewe definisies" nie, want in hierdie geval word geen klas geskep nie, maar word daar gekies vanuit 'n reeds beskikbare totaliteit. Dit maak dus geen verskil of daar verwys word na 'n klas waarin die nuwe klas self bestaan nie. Volgens die konstruktivisme lei hierdie posisie tot die soort antinomieë waar impredikatiewe proposisies 'n sleutelrol speel.

Die konstruktivisme noodsaak egter 'n onafwendbare gevolg, naamlik dat die teorie van 'transfinitie' met sy hiërargie van altyd-stygende oneindighede verwerp moet word. Cantor se teorema waarvolgens die klas van deelklasse van 'n gegewe klas van 'n groter mag (kardinaliteit) is as die klas self, is ook nie aanvaarbaar vir 'n konstruktivistiese teorie nie. Ewe "konstruksionisties" onaanvaarbaar is die geval waar die klas onder bespreking oneindig is, want ook ten opsigte daarvan meen Cantor dat die magsversameling legitiem gevorm kan word. Die gebruik van hierdie aksioma (in die Zermelo-Fraenkel versamelingsleer is die aksioma van die magsversameling onafhanklik en konsistent) veronderstel die aanvaarding van impredikawiteit.

Bogenoemde word treffend gedemonstreer in 'n spesifieke voorbeeld van Cantor se bekende diagonal-bewys, naamlik dat die reële getalle nie aftelbaar is nie. Hierdie bewys is identies aan die bewys van die nie-aftelbaarheid van die versameling van reële getalle omdat elke individuele reële getal beskryf kan word as 'n (opeens-oneindige) versameling van positiewe heelgetalle. Die postulasie van 'n voltooide oneindigheid (die: opeens-oneindige) is vir die konstruktivis 'n platoniese fiksie. Volgens die konstruktivis bestaan die oneindige op geen ander wyse as die moontlikheid om altyd verdere konstruksies daar stel nie. Dit rym egter nie met die idee van 'n voltooid-oneindige totaliteit nie.

Die iteratiewe ("iterative") konsep van 'n versameling

'n Versameling word bepaal wanneer dit gedetermineer word deur enige gegewe objek x , of x aan die versameling behoort of nie. Die objekte wat aan die versameling behoort, word die elemente van die versameling genoem. Die versameling is 'n enkel objek wat gevorm word deur sy elemente. Die

elemente is objekte van enige soort: Plante, fotone, funksies, versamelings, ens.

Wang som die iteratiewe konsep van 'n versameling soos volg op: "According to the iterative concept, a set is something obtainable from some basic objects (such as the empty set, or the integers, or individuals, or some other well-defined urelements) by iterated applications of the rich operation 'set of' which permits the collecting together of any multitude of 'given' objects (in particular, sets) or any part thereof into a set. This process includes transfinite iterations. For example, the multitude of sets obtained by finite iteration is considered to be itself a set" (Wang, 1974:181).

Ons kan 'n versameling van 'n menigvuldigheid vorm indien die domein van die variansie van hierdie veelheid intuïtief is. Dit is die kriteria vir die bepaling of die veelheid 'n versameling vorm. Die natuurlike wyse om hierdie intuïtiewe domeine te verkry, is deur die gebruik van intuïtiewe konsepte (gedefinieerde proposisies). 'n Intuïtiewe konsep stel ons in staat om 'n oorsig ("to look through" of "run through" of "collect together") te verkry, in 'n ideale sin, van al die objekte in die menigvuldigheid wat die uitbreiding van die konsep uitmaak. Dus: "... each intuitive concept determines an intuitive range of variability and therewith a set" (Wang, 1974:182).

Wat hier interessant is, is dat Wang 'n onderskeid tref tussen abstrakte konsepte (soos bv. gedifferensieerde menigvuldigheid) en intuïtiewe konsepte. Dit is egter nie duidelik of abstrakte konsepte as abstrakte objekte beskou kan word nie.

Wanneer dit kom by die oorsig van 'n oneindige reeks van objekte, dan voorveronderstel die oorsig 'n oneindige intuïsie wat ook 'n idealisering is. Streng gesproke kan daar net deur eindige reekse gewerk word (en reekse met 'n beperkte grootte). Hierdie idealisering groei in homself, bv. nie net word die oneindige aantal heelgetalle beskou as 'n gegewe nie, maar ons neem ook as 'n gegewe aan die selekteringsproses van heelgetalle van hierdie eenheid van alle getalle en daarmee al die moontlike wyses om heelgetalle uit die proses te los. So word 'n nuwe intuïtiewe idealisering verkry (naamlik die versameling van alle versamelings van heelgetalle) en so word daar aanbeweeg.

Volgens Wang (1974:186) is die sewe aksiomas wat die Zermelo Frankel (ZF of ZFC) sisteem opmaak in versamelingsteorie waar vir die iteratiewe konsep van 'n versameling. Op 'n meer formele vlak kan die hierargie van versamelings wat die resultaat is van die iteratiewe konsep (deur te veronderstel dat die ordinale getalle aanvanklik gegee is), soos volg

uiteengesit word:

R_0 = die leë versameling (of, partykeer, die versameling van heelgetalle)

$R_{\alpha+1}$ = die magsversameling van R_α d.w.s. die versameling van alle deelversamelings van R_α

R_λ = die vereniging van alle R_α , $\alpha < \lambda$ waar λ die limiet ordinaal is

V = die vereniging van alle R_α , α is enige ordinaal.

Dit beteken dat die geheel ("universe") van alle versamelings uit alle x bestaan sodat x aan R_α behoort met α as 'n ordinaal. Die kleinste α (waar x behoort aan R_α) word die graad ("rank") van x genoem. Laasgenoemde formulerings sukkel egter met magversamelings en ordinale getalle. Daarom word daar baie tyd spandeer om meer ordinale getalle te vind deur die inbring van nuwe kardinale getalle ten einde aksiomatiese versamelingsteorie te versterk. Die iteratiewe konsep toon ooreenkomste met Cantor se oorspronklike idee (die 1895 definisie i.t.v. 'n kolleksie van objekte in 'n geheel en die 1883 definisie i.t.v. eenheid en menigvuldigheid) en is verder ontwikkel deur Mirimanff, Van Neumann, Zermelo, Bernays en Gödel. (Wang, 1974:187).

Wang het 'n konstruktivistiese sisteem ontwikkel wat \sum genoem word. Die sisteem \sum is ook gebaseer op 'n iteratiewe konsep en beskik oor drie prominente kenmerke: Die sisteem \sum is 'n sterk konstruktivistiese teorie met 'n kumulatiewe konstruksie van die orde begrip. 'n Volgende kenmerk is dat die orde-hiërargie gekontinueer word tot in die gebied van die transfinitie. In die derde plek is dit nie 'n gewone sisteem nie, maar die vereniging van 'n oneindige ry van steeds groter sisteme (Wang, 1954:247, 248; Kanamori, 2007:46).

In die \sum sisteem moet daar begin word met 'n wel-omskrewe aanvangstotaliteit van konstruktiewe ordinale getalle en dan moet die totaliteit van al die ordinale getalle β beskou word. Hierdie ordinale getalle kan dan gedefinieer word in 'n sisteem $\sum\alpha$, waar α 'n konstruktiewe ordinale getal is van die oorspronklike totaliteit (hierdie nuwe totaliteit omvat die oorspronklike totaliteit as 'n werklike deel); van hier word nou verder gevorder na die totaliteit van ordinale getalle t wat definieerbaar is in 'n sisteem S_b waar b aan die tweede totaliteit behoort, ens. Op hierdie wyse skep die sisteem sy eie uitbreiding en word die gevaar van 'n sirkel uitgesluit. Hierdie versamelingsteoretiese sisteem kan as oop beskou word aangesien dit die weg baan om nuwe versamelings van gegewe versamelings te konstrueer en dit geen finale grens aan hierdie konstruksies stel nie. Die sisteem S is dus oop en daar bestaan geen beperkings op die moontlikheid van verdere uitbreidings nie (Stegmüller, 1977a:57; Wang, 1954:261).

Geen aftelling kan die totaliteit van alle versamelings van positiewe heelgetalle uitput nie. Hier kom die streng platonis tot die gevolgtrekking dat daar nie-aftelbare versamelings bestaan. In 'n konstruktiewe teorie – in besonder die teorie S – word die saak anders benader, naamlik dat dit nie die bestaan van nie-aftelbare versamelings is wat aftelling onmoontlik maak nie, maar eerder die mentale onvermoë om 'n duidelike en presiese idee te vorm van die totaliteit van alle versamelings (funksies, wette) wat aftelling definieer. Wang beweer dat nie-aftelbare totaliteite – soos die versameling van alle versamelings of die versameling van alle versamelings van natuurlike getalle – gekoppel kan word aan die konstruktiewe versameling op dieselfde wyse as wat die Kantiaanse “ding in homself” (“Ding an sich”) gekoppel is aan moontlike ervaring. Die vraag of hierdie totaliteite werklik nie-aftelbaar is of nie, moet op soortgelyke wyse beantwoord word as Kant se antwoord op die vraag of tyd en ruimte werklik eindig is of nie. Dit is net so onmoontlik om te sê “van al my konsepte” dat hulle nie-aftelbaar is as om te sê dat hulle aftelbaar is. Nie een van hierdie bewerings kan gesteun word deur 'n konstruksie in die mens se gedagtegang nie. Die konstruksie van nie-aftelbare totaliteite is net so onmoontlik as die konstruksie van geslote aftelbare totaliteite. Die mens se konstruksies kan in hierdie tansendentale terrein eindeloos voortgesit word. Die totaliteit van alle versamelings is soos Kant se “Ding an sig”. Die konstruktiewe versameling korrespondeer met alle moontlike ervaringe.

Die klassieke teorie met sy hiërgargie van transfinitie getalle sien idees (in die Kantiaanse sin) as volledige ideële vorme in platonistiese sin. Op hierdie punt betrek ons Rucker se ondersoek na die verhouding tussen denke (idees en vorme) en die aktueel oneindige. Ons bewussyn is volgens hom 'n “oog” wat rondbeweeg in 'n soort mentale ruimte. Alle denke bestaan reeds in hierdie multidimensionele ruimte wat hy “the mindscape” (Rucker, 1982:36) noem en kan nooit volledig verken word nie. As voorbeeld hiervan kan die versameling **N** van alle natuurlike getalle beskou word. Dit kan soos volg voorgestel word: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die “...” staan vir iets onuitdrukbaar. Die idee is egter dat alle natuurlike getalle saamgevat kan word in 'n geheel/totaliteit.

Wat die absoluut oneindige betref, meen Rucker dat dit geassosieer kan word met die Ene. Hy onderskei tussen rasionaliteit en mistisiteit en wys daarop dat ons 'n mistiese verbinding het met die Ene (die absoluut oneindige) (Rucker, 1982:208). Ook die idee van die aktueel oneindige word gereserveer vir God (vanaf Augustinus) of enige ander “ewige wese”, omdat hulle die vermoë besit om 'n oneindige menigvuldigheid opeens te kan oorsien. Die verstaan van wat getalle is, of watter versamelings bestaan, is bv. vir Cantor gekoppel

aan die aard van God self (Pennings, 1993:171; Wang, 1974:210). Soos reeds vermeld, assosieer Wang die onafelbare totaliteite met Kant se “Ding an Sich”. Dit is dus iets wat ons kan bedink, maar nie kan ken nie.

Dit is egter nie nodig om die toevlug tot teleologie of Kant se “Ding an Sich” te neem nie. In werklikheid is hier sprake van ’n antesiperende regulatiewe hipotese. Die antesiperende hipotese van die opeens-oneindig (aktueel oneindige) verdiep die modale sin van getal onder die begeleiding van ’n teoretiese insig in die onherleibare aard van die ruimte-aspek waar die besef van “opeens” oorspronklik is (Strauss 1994a: 141). Die uiteindelijke grond vir die invoering en fundering van die versamelingsteorie as ’n verdiepte getalsteorie benodig gevolglik ’n erkenning beide van die uniekheid en die wederkerig-onverbreeklike samehang tussen (onder meer) die getals- en ruimte aspekte – wat ondubbelsinnig die teoretiese belang van ’n erkenning van modale universaliteit-in-eie-kring onderstreep. (Daar sal in ’n ander artikel hieraan aandag gegee word). Hierdie siening kan aansluiting vind by Kanamori se siening dat: “Thus, set theory is more of an open-ended framework for mathematics rather than an elucidating foundation. It is a field of mathematics that both proceeds with its own internal questions and is capable of contextualizing over a broad range which makes of set theory an intriguing highly distinctive subject” (Kanamori, 2007:52).

Vir eers word volstaan met die stelling dat die voorafgaande uiteensetting deurgaans die fokus gerig het op basiese eienskappe van getalsrelasies wat in die kategorie van modale universaliteit-in-eie-kring val. Want in die ondersoek het dit aan die lig gekom dat die komplikasies wat telkens ingetree het, veral verband hou met die kruissnydende interrelasies tussen getal en ruimte. Dit het met ander woorde geblyk dat die bloot aritmetiese idee van menigvuldigheid nooit in die wiskunde kon loskom van die “suigkrag” van ’n strewe om van “alles” te praat nie. Die wisselterm vir hierdie “alles” – wat veral in die versamelingsteorie prominensie ontvang het – is die gebruik van die primitiewe term totaliteit. In die besonder kan daar – in verband met die aard van modale universaliteit-in-eie-kring – eerstens gedink word aan die notasie onderskeid tussen predikaatletters soos die “F” van “Fx” en die gebonde veranderlikes wat gebruik word in verband met “ ϵ ” om klasse as waardes aan te neem. Tweedens moet aandag geskenk word aan die probleem van die oneindige wat onderliggend is aan aksioma A8. Derdens is daar die aanwesigheid van die impredikatiewe en predikatiewe definisie van ’n versameling en onderliggend daaraan het ons in aanraking gekom met die onderskeid tussen platonisme enersyds en die konseptualisme en nominalisme andersyds. Vierdens volg die klassifisering van die ontologiese posisies van nominalisme, konseptualisme en platonisme. Laasgenoemde

drie posisies kan tewens getipeer word deur die kwantitatiewe kategorieë eindige totaliteit, aftelbare oneindige totaliteit en die nie-aftelbare oneindige totaliteit. Dit is juis as gevolg van hierdie klassifikasie dat Stegmüller van mening is dat die konstruktiewe konseptualisme 'n deeltkategorie van die platonisme is en nie van die nominalisme nie. Die nominalisme se negatiewe beskouing van abstrakte objekte lê in hul verwerping van die idee van 'n opeens-oneindige totaliteit. Die gaping tussen die nominalisme en die platonisme kan voorts teruggevoer word na die skynbare spanning tussen die (suksessief) oneindige en die (opeens-) oneindige. Vir Stegmüller is dit ook die rede waarom dit moeilik is om 'n platonistiese konteks te vertaal in 'n nominalistiese konteks. Die konstruksies van logika en wiskunde op 'n konsistente nominalistiese basis moet aantoon dat alle oneindighede (aftelbaar of ooraftelbaar) slegs 'n *façon de parler* is en dat dit slegs as afkorting dien van stellings oor 'n eindige aantal diskrete objekte (Stegmüller, 1977a:60, 61).

Die vernaamste rede waarom die nominalisme nie “abstrakte objekte” aanvaar nie, het juis te doen met die afkeur van die (opeens-) oneindige. Ons het reeds aangedui dat die klasseteorie omgeskakel kan word tot 'n nominalistiese taal en wel op die basis van 'n eindige domein. So 'n omskakeling is egter nie moontlik vir 'n oneindige domein nie (Stegmüller, 1977a:60; Quine, 1947:80-84).

Die onderskeid tussen die nominalisme en platonisme hou verband met die vraag of die waarde van die veranderlike van die sisteem klasse aanvaar of nie. Dit veronderstel (volgens Stegmüller) die onderskeid tussen abstrak en konkreet wat geassosieer kan word met die eindige, die aftelbaar oneindige en die ooraftelbaar oneindige. Dit is juis hierdie assosieëring wat die stelling bevestig dat diskreetheid en kontinuïteit (as primitiewe terme) 'n grondliggende rol speel in die divergensie tussen die nominalisme en die platonisme.

Samevatting

Volgens Stegmüller en Quine hang die onderskeid tussen platonisme en nominalisme nie af van die gebruik van individualuele predikate nie, maar van wat aanvaar word as die waarde van die gebonde veranderlike. Wanneer veranderlikes gebruik word vir abstrakte objekte (veranderlikes vir klasse, predikate, getalle, funksies, ens.), word die teoretikus as 'n aanhanger van die platonisme beskou. Iemand wat sodanige veranderlikes verwerp, is 'n

nominalis. Hierdie twee posisies vorm 'n totale disjunksie (wederkerige uitsluiting). Die hoofsaaklike tese van die nominalisme is reduksionisties in die sin dat alles wat in 'n platoniese sisteem gesê kan word, gereduseer moet word tot 'n nominalistiese sisteem. Platonisme is vir nominalisme 'n *façon de parler*. Daar is egter nog net 'n beperkte aantal platonistiese kontekste geherformuleer in 'n nominalistiese sisteem. Hierdie nominalistiese sisteem het dus nie voldoende bewyskrag en trefkrag nie. Dit is belangrik om daarop te let dat, volgens Stegmüller, die probleem van platonisme te doen het met die vraag of daar “abstrakte objekte” bestaan en nie met die vraag na algemene kennis nie. Die nominalisme aanvaar tewens ook algemene predikate. Die “al” en “daar is” strek oor die domein van konkrete objekte.

Konseptualisme is (volgens Stegmüller) 'n sub-kategorie van platonisme en nie van die nominalisme nie. Strauss (2009:438) toon aan dat Stegmüller se siening oor nominalisme en platonisme, Quine en Goodman se onderskeid tussen platonisme en nominalisme navolg. Hiervolgens aanvaar konseptualisme abstrakte ideale (nie-konkrete) objekte. Hierdie tendens is ook waarneembaar in die konstruktivisme van Hao Wang.

Dit bring Strauss (2009:438) tot die vraag na wat die verhouding tussen abstrak-konkreet en universeel-individueel is. Strauss (2009:438) beweer verder: “The above-mentioned examples by Stegmüller, in order to differentiate between abstract and concrete, strictly correspond to the distinction between modality and entity. With the dimension of modalities, we must distinguish between the meaning of the aspects of number and space, which mutually cohere on the basis of their uniqueness (irreducibility).” Dit het ook aan die lig gekom hoe die getal- en ruimte aspekte onderlê word in die gebruik van primitiewe terme soos “menigvuldigheid”, “geheel” en “totaliteit”.

Bibliografie

- FREGE, G. 1892-1895. Comments on Sense and Meaning. In: Frege, G. 1979. *Posthumous Writings*. Hermes, H., Kambartel, F. en Kaulbach, F. (Reds.) (Transl. Long, P. en White, R.) Basil Blackwell. Oxford.
- KANAMORI, A. 2007. Set Theory from Cantor to Cohen. In Volume editor: Irvine, A. General editors: Gabbay, D.M., Thagard, P. and Woods, J. *Handbook of the Philosophy of Science*. Philosophy of Mathematics. Elsevier BV,
- PENNINGS, T.J. 1993. Infinity and the Absolute: Insights into Our World, Our Faith and Ourselves. *Christian Scholar's Review*. Vol. XXIII(2):159-180.

- QUINE, W.V.O. 1947. On Universals. *Journal of Symbolic Logic*. 12:74-84.
- QUINE, W.V.O. 1953. From a Logical Point of View. 9 *Logico-Philosophical Essays*. Cambridge. Harvard University Press.
- QUINE, W.V.O. 1958. *Mathematical Logic*. Harvard University Press.
- QUINE, W.V.O. 1978. Über Universalien. In: Stegmüller, *Das Universalien-Problem*. Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- QUINE, W.V.O. 1992. Structure and Nature. *The Journal of Philosophy*. 1(LXXXIX):5-9.
- RUCKER, R.v.B. 1982. Infinity and the Mind. *The Science and Philosophy of the Infinite*. Birkhäuser.
- STEGMÜLLER, W. 1977a. *Collected Papers on Epistemology, Philosophy of Science and History of Philosophy*. Vol. 1. Dordrecht, Boston.
- STRAUSS, D.F.M. 1994a. Mathematical paradigms. The interaction of commitment, theoretical world-view and axiomatic set theory (a historical and systematic assessment of interplay between basic beliefs and scientific distinctions). *Tydskrif vir Christelike Wetenskap*. 30(3-4):113-167.
- STRAUSS, D.F.M. 2009. *Philosophy. Discipline of the Disciplines*. Grand Rapids. Paideia Press.
- WANG, H. 1954. The Formalization of Mathematics. *Journal of Symbolic Logic*. 19:241-266.
- WANG, H. 1974. *From Mathematics to Philosophy*. New York. Routledge & Kegan Paul.