’n Goue draad wat deur die geskiedenis van die Wiskunde loop[1]

D.F.M. Strauss
Departement Filosofie
Fakulteit Geesteswetenskappe
Universiteit van die Vrystaat
BLOEMFONTEIN 9300

dfms@cknet.co.za

Opsomming

Die aanvanklike sukses wat opgesluit gelê het in the Pythagoreïese oortuiging dat rasionale verhoudinge alles getalsmatig toeganklik maak, het spoedig gegewens teëgekom wat nie met behulp van rasionale getalsverhoudinge hanteer kon word nie. Die onvermoë om hierdie probleem getalsmatig tot ’n oplossing te bring sou daartoe lei dat die Griekse wiskunde die weg van ’n geometrisering *bewandel het. Daar is nie probeer om hierdie impasse met behulp van die idee van* oneindige totaliteite *te bowe te kom nie. Nie alleen het dit die aard van getal ondergeskik aan die ruimte gemaak nie, want dit het ook die Middeleeuse spekulatiewe “metafisika van die syn” tot gevolg gehad. Eers via Descartes sou die moderne tyd ’n toenemende terugkeer na ’n aritmetiese perspektief vergestalt. Die ontdekking van die differensiaal- en integraalrekene deur Newton en Leibniz het egter opnuut probleme geskep, met name in die verantwoording van die aard van* limiete*. Die geykte benadering om limiete met behulp van konvergerende rye rasionale getalle te be-*

1 Ek betuig graag my dank teenoor prof. Ben Herbst, Departement Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Stellenbosch, vir sy kritiese kanttekeninge by ’n voor-finale weergawe van hierdie artikel. Dit het my gehelp om my argumente meer toeganklik te maak vir die leser.

paal, het ’n sirkelredenasie bevat, want om as limiet te kan optree moes elke sodanige limiet rééds ’n getal *gewees het. Skynbaar het Weierstrass daarin geslaag om in sy statiese teorie ’n suksesvolle alternatiewe waardering van ’n veranderlike te gee. Limiet-waardes kan willekeurig gekies word uit ’n domein van onderskeie getalle wat as ’n oneindige totaliteit opeens staties voorhande is. Toe hierdie benadering egter in die versamelingsteorie van Cantor tot Russell se kontradiksie lei, het twee teëgestelde reaksies die toneel oorheers. Die eerste was ’n aksiomatisering van die versamelingsleer en die tweede was ’n terugkeer na die oorspronklike Griekse sentimente waar die oneindige bloot as ’n onvoltooibare suksessie gesien is. Benewens aksiomatisering en ’n terugval op die potensieel-oneindige het die kentering by Frege – tot die siening dat die wiskunde wesentlik meetkunde is – en by die Franse kontinuum-wiskundiges, aan ons getoon dat die Griekse geometriseringalternatief selfs in die* 20^{ste} *en* 21^{ste} *eeu nog wiskundige navolging sou vind. In die algemeen word egter die oortuiging nog steeds gevind dat die* versamelingsleer *die basis van die hele wiskunde vorm. Die goue draad wat derhalwe klaarblyklik deur die ganse geskiedenis van die wiskunde loop, is enersyds in die komplekse aard van die* oneindige *gegee (hetsy in die sin van die* potensieël-oneindige *of in die sin van* oneindige totaliteite *of die* aktueel-oneindige*) en andersyds is dit in die kader van die immer-teenwoordige metgeselle van die oneindige te vinde, naamlik die “aritmetiese” en die “geometriese”. Bernays verkies om hier van* diskreetheid *en* kontinuïteit *te praat.*

Abstract

A golden thread running through the history of Mathematics

The initial success of the Pythagorean conviction that rational ratios would provide access to everything, soon had to face spatial relationships exceeding the grip of rational numbers. This led to the geometrization of Greek mathematics. It was not attempted to resolve this impasse by using the idea of infinite totalities. Instead, number was subjected to space and in addition this geometrization provided a starting-point for the entire medieval legacy of a metaphysics of space (of “being”). Descartes started a new development heading towards a new process of arithmetization. However, the discovery of the differential and integral calculus by Newton and

Leibniz created new problems, specifically in respect of the account given of limits. *The standard approach was to obtain limits by means of converging sequences of rational numbers. Yet this procedure contains a vicious circle, because in order to serve as such a limit it already had to be a* number. *Apparently Weierstrass successfully advanced an alternative assessment of a variable in terms of a static theory. Limit values can be chosen arbitrarily from distinct numbers which are at once present in an infinite totality. When this approach, in the set theory of Cantor, generated Russell's contradiction, two opposing reactions dominated the scene. The first pursued an axiomatization of set theory and the second reverted to the original Greek sentiment of viewing infinity merely as an unfinished succession. In addition to axiomatization and acknowledging only the potential infinite, the later development in the thought of Frege, as well as the continuum mathematicians from France, demonstrates that the Greek alternative of geometrization still had adherents in the 20th and 21st centuries. In general the conviction still is that set theory forms the foundation of mathematics. Therefore, the golden thread apparently running through the entire history of mathematics on the one hand is given in the complex nature of the infinite (either in the sense of the potential infinite or as an infinite totality) or, on the other, it is found in the context of two ever-present companions, the "arithmetical" and the "geometrical". Bernays prefers to speak of* discreteness *and* continuity*.*

"Indien 'n mens ten slotte 'n kort slagwoord wil aangee wat die lewende sentrum van die wiskunde betref, dan durf 'n mens wel sê: dit is die *wetenskap van die oneindige*"
(Weyl, 1966:89).

1. Relevansie van 'n historiese perspektief

Die indrukwekkende gebou van die moderne wiskunde dwing onwillekeurig respek af by elke student wat paaie kruis met hierdie besondere vakwetenskaplike dissipline. Dwarsdeur die geskiedenis is die wiskunde en wiskundiges met agting bejeën. Wat ons kan waardeer as die wiskunde van vandag het egter nie uit die lug geval nie; dit het 'n lang ontwikkelingsgang deurloop en daarmee aanleiding gegee tot 'n ewe indrukwekkende geskiedenis. Voor die einde van die 19de eeu het Moritz Cantor ’n meerdelige geskiedenis van die wiskunde die lig laat sien en sedertdien vind ons verskeie geskiedenisse wat in die loop van die 20ste eeu gepubliseer is (vgl. die vermelding van die belangrikste hiervan deur Boyer, 1991:xi).

Juis ’n studie van die *geskiedenis* van die wiskunde help ons verstaan dat die wiskunde nie met enige spesifieke wiskundige teorie of hoofstuk van die wiskunde vereenselwig kan word nie. Reuben Hersh verwys, byvoorbeeld, na die invoering van versamelingsteoretiese sienings in skoolhandboeke gedurende die jare sestig van die vorige eeu. Hy onderken daarin die filosofiese leerstuk: “Mathematics *is* axiomatic systems expressed in set theoretic language” (Hersh, 1997:41). Tereg vra hy waar hierdie reduksionistiese oortuiging, naamlik dat die wiskunde basies versamelingsleer *is*, ons laat? Wat doen dit aan Euklides, Archimedes, Newton, Leibniz en Euler, almal figure wat lank voor die ontstaan van die versamelingsleer van Cantor geleef het? Anders gestel: die geskiedenis van die wiskunde vóór die ontstaan van die versamelingsteorie word eenvoudig geëlimineer. Hersh se oordeel is radikaal: “That claim obscures history, and obscures the present, which is rooted in history. An adequate philosophy of mathematics *must* be compatible with the history of mathematics” (Hersh, 1997:27).

2. Die historiese plek van die Griekse wiskunde

Die wiskundige geskrifte uit die oudheid konfronteer die moderne wiskunde nie met inhoudelike probleme nie. Tog vermeld Oskar Becker dat die “Aristoteliese teorie van oneindigheid en van die kontinuum in die besondere vraagstelling daarvan nog steeds aktuele betekenis vir die probleem van ’n werklike toereikende fundering van die hoëre analise besit” (Becker, 1965a:XII, note 2). Die teorie van perfekte getalle bied ’n probleem wat tans nog nie opgelos is nie. Volgens die Pythagoreërs heet ’n getal *perfek* wanneer die som van die egte delers daarvan gelyk aan die getal self is, byvoorbeeld 1 + 2 + 3 = 6 en 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28. Die algoritme wat Euklides vermeld stel vas wanneer ’n ewe getal *perfek* is.[2] Maar die vraag of daar ook onewe perfekte getalle bestaan is nog onbeantwoord (sien Lorenzen, 1960:61).

2 ’n Ewe getal is slegs dan *perfek* wanneer dit die vorm $2^n(2^{n+1} - 1)$ besit, waarby $2^{n+1} - 1$ ’n priemgetal is (’n priemgetal is ’n getal groter as 1 wat slegs deur 1

Uiteraard besit alle mense die vermoë om te kan tel en om basiese ruimte-figure (soos sirkels, vierkante, driehoeke en reghoeke) in konkrete situasies te eien. Daarom hoef dit ons nie te verbaas nie dat die Griekse wiskunde voorafgegaan is deur tweeduisend jaar van wiskundige aktiwiteite. In hierdie tydperk vind ons reeds 'n skriftelik-vasgelegde getallesisteem, reken-metodes en die begin van die meetkunde. Spoedig hierna sou die Babiloniërs en Sumeriërs kwadraatsvergelykings oplos, terwyl Pythagoras se leerstelling reeds prakties toegepas is. Daar is egter geen teken dat daar in die voor-Griekse wiskunde enige *bewyse* deurgevoer is nie (Becker, 1965a:XVI). Waar dit nog moontlik was, byvoorbeeld vir Plato, om ruimte-figure in 'n geïdealiseerde (*intelligibele*) tussen-gebied te plaas, het die aard van getal vroeg reeds gelei tot 'n besef van die verskil tussen aantalligheid en die simbole of tekens met behulp waarvan 'n gegewe menigvuldigheid aangedui kon word. Waar meetkundige besinning in Euklides se aksioma-sisteem neerslag gevind het, word daar in die antieke egter geensins 'n aksiomatisering van die "aritmetika" aangetref nie (vgl. Lorenzen, 1960:57).

Indien die vraag gevra sou word of ons ervaringsbesef van ruimteverhoudinge minder of meer fundamenteel as ons getalsbesef is, kan verskillende gesigspunte betrek word. Byvoorbeeld, eers teen 'n ouderdom van 15 maande vertoon kinders 'n besef van orde, wat beteken dat wat hulle voor hierdie ouderdom vermag, geskied sonder die wete dat drie groter is as twee of dat twee groter as een is. Die vermoë om een, twee, of drie voorwerpe opeens (gelyktydig) waar te neem (in Engels bekend as "subitizing") is eie aan alle mense. Nogtans is die proses van "subitizing" verskillend van 'n telproses of 'n skatting (Lakoff, & Núñez, 1999:19). Met ander woorde, daar is 'n verskil tussen suksessie (opeenvolging/aftelling) en die opmerk van 'n menigvuldigheid met een oogopslag, gelyktydig.

Hoewel ons vandag geneig sou wees om prioriteit aan getal in die sin van suksessie of opeenvolging te gee, was drie-dimensionele meetkunde die hoofbestanddeel van die Griekse wiskunde – wat

en homself deelbaar is). Augustinus merk in sy *Civitate Dei* op dat God hemel en aarde in ses dae geskep het nie omdat hy wou nie, maar omdat die getal ses 'n perfekte getal is! Later sou Thomas Aquinas ook opmerk dat God nie die goeie gebied het omdat hy *wou* nie, maar omdat die goeie *goed* is.

Fowler ’n *nie-gearitmiseerde meetkunde* noem (Fowler, 1999:10). Dit beteken nie dat die Griekse wiskunde nie byvoorbeeld van kardinale getalle gebruik gemaak het nie, maar juis dat dergelike getalle in verband gebring sou word met ons ervaring van ruimteverhoudinge en in die besonder met die aard van *dele*. Daarom sal daar in plaas van die getallery 1, 2, 3, ... verwys word na die ry “duet, trio, quartet, quintet, ...” Dit gaan hier oor *getalle* en *dele* (*arithmoi* en *mere* – Fowler, 1999:13). *Arithmoi* verskyn ook in ander kontekste, soos “once, twice, three-times, four-times, ...”; of “simple, double, triple, quadruple, ...” of selfs as “half, third, quarter, fifth, ...” (Fowler, 1999:14). Soms word *arithmoi* ook ordinaal verstaan: “eerste, tweede, derde, vierde, vyfde, ...”.

Nogtans was die skool van Pythagoras oortuig dat alle ruimteverhoudinge met behulp van gewone breuke (vandag ook bekend as *rasionale getalle*) uitgedruk kon word. Hierdie oortuiging het beslag gekry in die oorkoepelende aanduiding dat *alles getal is*,[3] waaruit vanself volg dat in die vraag na die verhouding tussen getal en ruimte vasgehou is aan die primaat of voorrang van *getal*. Dit word ook aangedui as ’n *aritmetiserende* siening. Von Fritz wys daarop dat die Pythagoreërs die “wese” van talle dinge in getal gevind het of van mening was dat dit deur getalle uitgedruk kan word. Uit die hoek van die musikale harmonie-leer *is* klanke en figure as getalle gesien (Von Fritz, 1945:286-287).[4]

3. Die effek van die ontdekking van “inkommensurabeliteit”

Ruimte-verhoudinge wat met behulp van breuke uitgedruk kan word het ook *kommensurabel* geheet. Die ontdekking dat daar *inkommensurabele* ruimte-verhoudinge bestaan, dit wil sê verhoudinge wat nié met behulp van rasionale getalle uitgedruk kan word nie,

3 Die werk van Kurt Reidemeister oor die eksakte denke van die Grieke bevat ’n gedeelte oor “Die Arithmetik der Griechen” waarin uitvoerig ingegaan word op hierdie Pythagoreïese oortuiging dat alles getal is (vgl. Reidemeister, 1949:15 e.v., 30 e.v., 43).

4 Die aritmetiese basis van die Pythagoreïese musiekleer verklaar waarom ons in die loop van die Middeleeue musiek by die “Quatrivium” ingedeel vind, saam met die “aritmetika”, “astronomie” en “geometrie” (sien Lorenzen, 1960:68 en Reidemeister, 1949:25 e.v.).

sou egter hierdie oorspronklike *aritmetiseringstendens* bevraagteken en selfs daartoe lei dat die Griekse wiskunde 'n alternatiewe weg bewandel het. Hoewel die tese van Von Fritz (1945:242 ff.), naamlik dat *inkommensurabeliteit* aan die hand van 'n reëlmatige vyfhoek (die *pentagram*) deur Hippasos van Metapontum ontdek is,[5] deur Oskar Becker (sien Becker, 1957:50-51) bevraagteken word, verteenwoordig die vierkantswortel van 2 (√2) desnietemin die eerste getal waarvan die irrasionaliteit *aritmeties* bewys is (dit is die eerste "inkommensurabele getal"). In die algemeen beteken dit dat √2 nie uitgedruk kan word in die vorm van 'n gewone breuk nie.[6]

Plato vermeld in sy dialoog, *Theaitetos,* dat Theodoros die irrasionaliteit van √3, √5, ... √17 bewys het sonder om na √2 te verwys, klaarblyklik omdat die bewys daarvan vroeër reeds bekend was. In die lig van hierdie twispunt is dit merkwaardig om na die volgende ketting van breuke te kyk wat reeds in die Griekse wiskunde bekend was. Tel die eerste breuk (1/1) se teller en noemer by mekaar om die noemer van die tweede breuk te verkry (1+1=2). Tel dan die eerste twee breuke se noemers by mekaar (1+2=3) om die teller van die tweede breuk te bepaal (3/2).

$$\tfrac{1}{1} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{7}{5} \quad \tfrac{17}{12} \quad \tfrac{41}{29} \quad \tfrac{99}{70} \quad \tfrac{239}{169} \quad \tfrac{577}{408} \quad \tfrac{1393}{985}$$

Wanneer hierdie proses deurgevoer word blyk dit dat 'n rangskikking van die geledinge van hierdie ry breuke van groot na klein "na binne"

5 Hippasus van Metapontum was daarvan beskuldig dat hy 'n wiskundige geheim bekend gemaak het deur die ontdekking van *inkommensurabeliteit* te publiseer (sien Riedweg, 2005:107).

6 Veronderstel immers dat dit wel gedoen kan word. Dan sal $\sqrt{2} = a/b$, waar a en b nie beide deur 2 deelbaar is nie (dit wil sê, die enigste gemeenskaplike faktor tussen a en b is die getal 1). Kwadreer egter beide kante, dan is $2 = a^2/b^2$, oftewel $2b^2 = a^2$. Aangesien $2b^2$ ewe is (deur 2 deelbaar is), moet a^2 ook ewe wees. Maar slegs die kwadraat van 'n ewe getal is ewe (2x2 = 4, e.s.m.), wat beteken dat ons a as $2p$ kan skryf (dit wil sê, as 'n getal wat deur 2 deelbaar is). Substitueer nou a met $2p$ in die vergelyking $2b^2 = a^2$, dan kry ons $2b^2 = 4p^2$ – waaruit volg dat $2p^2 = b^2$ is. Omdat b^2 nou ewe is moet b self ook ewe wees, wat as $2q$ geskryf kan word. Wanneer a as $2p$ geskryf kan word en b as $2q$ volg dit dat a/b dieselfde is as $2p/2q$ – in stryd met die oorspronklike stipulasie dat a en b nie deur die getal 2 deelbaar is nie. Gevolglik kan √2 deur geen breuk van die vorm a/b weergegee word nie.

(afwisselend) konvergeer tot $\sqrt{2}$ as grenswaarde. Dit beteken dat 1/1 kleiner is as $\sqrt{2}$, dat 3/2 groter is, dat 7/5 kleiner maar tog nader aan $\sqrt{2}$ is, dat 17/12 groter maar tog nader aan $\sqrt{2}$ is, en so meer.

$$\tfrac{1}{1} < \tfrac{7}{5} < \tfrac{41}{29} < \tfrac{239}{169} < \tfrac{1393}{985} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \tfrac{577}{408} < \tfrac{99}{70} < \tfrac{17}{12} < \tfrac{3}{2}$$

Hierdie ontdekking het beteken dat die *ratio* (verhouding) tussen die diagonaal en enige sy van ’n vierkant nie in terme van die verhouding van gewone heelgetalle (soos *a*/*b*) uitgedruk kan word nie. Die Griekse woord *logos* wat oorspronklik bloot ’n *woord* aandui, is ook gebruik as aanduiding van die *verhouding* of *ratio* tussen heelgetalle en dit was vanselfsprekend dat *inkommensurabele* verhoudings met die Griekse woord *alogos* aangedui sou word. Die teleurstelling en onvermoë wat gepaardgaande met die ontdekking van irrasionale ruimte-verhoudinge na vore getree het, het aan die term *alogos* bykomend ’n *negatiewe* konnotasie besorg, naamlik dat dit *onlogies* is (vgl. Szabó, 1965:440 waar die uitdrukking “etwas Widersinniges” gebruik word).[7] Letterlik genome behoort die woord *alogos* bloot diens te gedoen het om aan te dui dat daar *geen* verhouding of *logos* aanwesig is nie. Vir ’n tydlank is die irrasionaliteit van die woord *alogos* onder die begrip *onuitdrukbaar* (*arretos*) tuisgebring (sien Von Fritz, 1945:301-302).

4. Die primaat-verskuiwing van “aritmetiek” na “geometrie”

Lorenzen wys daarop dat die ontdekking van *inkommensurabeliteit* daartoe gelei het dat die Griekse wiskunde in die meetkunde die fundering van die getalleleer (“aritmetiek”) gesien het (Lorenzen, 1960:51). Becker wys in hierdie ontwikkelinge op die vaslegging van ’n kloof tussen “heelgetal en dit wat kontinu is”.[8] Wanneer Fraenkel, Bar-Hillel, Levy, & Van Dalen, 1973, in hul standaardwerk oor die grondslae van die versamelingsleer verwys na die *aritmetisering* wat aan die paradokse van Zeno ten grondslag lê, geskied

7 Proklos het byvoorbeeld die uitdrukking *to alogos* gebruik om die oneindige verdeelbaarheid van die ruimte aan te dui. Volgens hom is daar “in die meetkunde hoegenaamd nie ’n kleinste nie” – en waar “deling tot in die oneindige voortgesit kan word, daar is ook die irrasionele (*das Sinnwidrige*, *to alogon*) voorhande” (aangehaal deur Szabó, 1965:440).

8 Die “Kluft zwischen ganzer Zahl und kontinuierlicher” (Becker, 1965a:XIX).

dit teen die agtergrond van die opmerking dat die *oorbrugging van die gaping tussen die gebiede van diskreetheid en kontinuïteit* sekerlik ŉ sentrale probleem, "presumably even *the* central problem of the foundations of mathematics" daarstel (Fraenkel *et al.,* 1973:211). Enersyds het hierdie aritmetisime sy invloed in die moderne wiskunde tot in die aksiomatiese versamelingsleer en die meta-wiskunde laat geld en andersyds sou die reaksie daarop in die Griekse wiskunde aanleiding gee tot die primaat van ons ruimte-besef. Omdat die mens intuïtief die kontinuum *opeens* in oënskou neem, was die Griekse wiskunde ná die ontdekking van irrasionale getalle daartoe geneig "to consider continuity to be the simpler concept" (Fraenkel *et al.,* 1973:213).

Lorenzen merk ook op: "Die ontdekking van *inkommensurabele* lystukke, derhalwe *irrasionaliteit* soos ons tans daarna sal verwys, het die voorrang van die meetkunde ten opsigte van die aritmetika vir die Grieke gefundeer" (Lorenzen, 1960:51). Op dieselfde bladsy gaan hy voort: "Elke getalsverhouding kan inderdaad meetkundig daargestel word, maar nie elke verhouding tussen lynstukke kan aritmeties voorgestel word nie."[9] Hierdie meetkundige voorrang verklaar ook waarom die Babiloniese metodes vir die oplossing van kwadraatsvergelykings deur *meetkundige metodes* vervang is (Lorenzen, 1960:51 ff.).

5. Die ruimtelike konteks van die hoofprobleme van die Griekse wiskunde

Veral *drie* probleme het die Griekse wiskunde hoofbrekens besorg. Die eerste daarvan betref ŉ aangeleentheid wat nog steeds ŉ erfenis in ons alledaagse spraakgebruik nagelaat het. Wanneer iets as onmoontlik beskou word maar nogtans aangedurf word, kan daar gesê word dat so ŉ persoon probeer om die *sirkel te kwadreer*

9 Dieselfde opmerking word by Laugwitz gevind wanneer hy skryf: "Jedes Zahlenverhältnis läßt sich geometrisch darstellen, aber nicht jedes Streckenverhältnis arithmetisch" en dan voeg hy daaraan toe dat dit as fundering gedien het om die voorrang aan die meetkunde bo die rekenkunde te gee, wat geïmpliseer het dat in die werke van Euklides die leer van getalle ŉ deel van die meetkunde geword het. ("Das begründet einen Vorrang der Geometrie vor der Arithmetik, und die Konsequenz sind die Bücher des Euklid: Die Theorie der Zahlen ist ein Teil der Geometrie" – Laugwitz, 1986:10).

(*"squaring the circle"/kwadratuur van die sirkel*). Dit herinner ons aan Immanuel Kant wat in 1783 die voorbeeld van 'n *onlogiese begrip* aangedui het deur van 'n *vierkantige sirkel* te praat (Kant, 1783:341). Hierdie voorbeeld van 'n onlogiese begrip hou met die kwadreringsprobleem verband, want, indien die Griekse wiskundiges nie *vooraf* tot 'n korrekte identifisering en onderskeiding van 'n *sirkel* en 'n *vierkant* gekom het nie, sou dit nie eers moontlik gewees het om hul wiskundige probleem korrek te formuleer nie! 'n Inkorrekte identifisering en onderskeiding van 'n sirkel en 'n vierkant sou tewens tot die *onlogiese* begrip van 'n "vierkantige sirkel" aanleiding gee. Dat die begrip van 'n vierkantige sirkel onlogies is vloei daaruit voort dat beide die *identifisering* (onderworpe aan die logiese beginsel van identiteit) en die *onderskeiding* (onderworpe aan die logiese beginsel van non-kontradiksie) *foutief* is (d.w.s., logies antinormatief is) – 'n sirkel is 'n sirkel (korrekte identifisering) en dit is nie 'n nie-sirkel nie (byvoorbeeld 'n vierkant – korrekte onderskeiding) (vgl. Kant, 1783:341; § 52b).[10]

Die eintlike herkoms van die uitdrukking "kwadratuur van die sirkel" gryp weliswaar veel verder terug in die geskiedenis. Hoewel die werklike ontstaan van hierdie probleem nie bekend is nie, lees ons by Plutarchus dat Anaksagoras, 'n bekende voor-Sokratiese wysgeer uit Griekeland (500-428 v.C.), tydens sy gevangeneskap in Athene homself besig gehou het met pogings om die sirkel te kwadreer.

Die klassieke beperking wat hieraan verbind was, is dat 'n vierkant gekonstrueer moes word vanuit 'n gegewe sirkel wat presies dieselfde oppervlakte sou besit as die oorspronklike gegewe sirkel – en dít deur slegs gebruik te maak van 'n liniaal en 'n passer. Die ander twee probleme hou verband met 'n unieke historiese besonderheid.

10 Meestal word slegs na Russell verwys wanneer hierdie voorbeeld van *onlogiese begripsvorming* ter sprake kom, maar die Duitse wysgeer Ernst Cassirer het Kant se voorbeeld omgekeer, want hy verwys naamlik na 'n "ronde vierkant" ("rundes Viereck") (Cassirer, 1910:16). Let egter daarop dat alhoewel dit, suiwer logies gesien, foutief is om te beweer dat daar iets soos 'n vierkantige sirkel bestaan, dit kan gebeur dat die suggestierykheid van oordragtelike (metaforiese) taalgebruik nuwe moontlikhede ontgin. Dink slegs aan die bekende Engelse verwysing na 'n bokskryt as *a boxing ring*. Het ons nie hier in die letterlike sin van die woord met 'n "vierkantige sirkel" te doen nie!?

Die beroemde heerser oor Athene gedurende die 5de eeu v.C., naamlik Perikles, is in die jaar 429 v.C. dood – klaarblyklik aan dieselfde plaag wat byna 'n kwart van die Atheense bevolking laat omkom het. Die oorlewering bestaan dat 'n afvaardiging na die orakel van Apollo te Delos gestuur is om te probeer uitvind hóé die plaag vermy kan word, en dat die orakel geantwoord het dat die kubiekvormige altaar van Apollo *verdubbel* moes word. Hoewel die Atheners die afmetinge van die kubus getrou verdubbel het kon dit die plaag nie besweer nie. In werklikheid is die volume van die altaar egter nie verdubbel nie, maar ver-agt-voudig! Hier ontmoet ons die ontstaan van die tweede probleem – wat gegee is in die taakstelling om bloot met behulp van 'n passer en 'n liniaal vanuit 'n gegewe kubus 'n nuwe een te konstrueer wat dubbeld die volume van die oorspronklike een besit.

Ongeveer uit dieselfde tyd stam ook die derde gevierde meetkundige probleem van die Griekse wiskunde. Dit is naamlik die probleem-vraag of dit moontlik is – nog stééds slegs met behulp van 'n passer en 'n liniaal – om 'n gegewe hoek presies in drie gelyke hoeke te verdeel?

Ons het hierbo vermeld dat die oudste Griekse wiskunde in die eerste plek rekenkunde (aritmetiek) was, soos bevestig deur die karakteristieke uitspraak dat *alles getal is*. Die skynbare aritmetiseerbaarheid van musikale konsonante het aanleiding gegee tot die algemene stelling: as enige twee dinge in verhouding tot mekaar soos twee getalle staan, is dit sélf ook bedekte getalle. Die belangstelling van die Pythagoreërs in die *vorm* van figure (w.o. gelyk-*vorm*-igheid) was klaarblyklik 'n stimulus tot die bewys van Pythagoras se bekende stelling, naamlik dat in enige reghoekige driehoek die kwadraat van die skuinssy gelyk is aan die som van die kwadrate van die twee reghoeksye.

Waarskynlik het reeds Hippasos van Metapontum (450 v.C.) ontdek dat hierdie bewys nie algemeen-geldig is nie, omdat dit van die veronderstelling uitgaan dat die lengtes van alle lynstukke in die verhouding van heelgetalle tot mekaar staan (d.w.s. altyd voorgestel kan word in die vorm van a/b waar a en b gewone natuurlike heelgetalle is). Die *pentagram* – dit is 'n reëlmatige vyfhoek – het Hippasos van die valsheid van hierdie veronderstelling oortuig – waarmee vanself irrasionale getalle (soos die vierkantswortel van 2) blootgelê is.

Ons het bykomend gesien dat, aangesien die irrasionele getalsverhoudinge wél ruimtelik konstrueerbaar was, dit daartoe gelei het dat die Griekse wiskunde die weg van die meetkunde bewandel het. Ná die aritmetisering van die Griekse wiskunde deur die Pythagoreërs wat ons reeds hierbo ontmoet het, tref ons nou gevolglik die *geometrisering* daarvan aan. Dít verklaar waarom ons ten tyde van Anaksagoras nie meer met *aritmetiese* (d.i. getals-)probleme gekonfronteer was nie, maar juis met *geometriese* probleme.

Deur die loop van die geskiedenis het talle pogings na vore getree om die bogemelde drie klassieke *geometriese probleme* tot ’n oplossing te bring. As newe-effek is natuurlik tot allerlei nuwe wiskundige insigte gekom. Ook is daar gevind dat indien die beperkinge wat ’n liniaal en ’n passer stel laat vaar word, die probleem inderdaad opgelos kan word. Die vraag of die probleme in hul oorspronklike vorm opgelos kan word, het egter sy fassinering en bekoring behou. Selfs ’n filosoof soos Thomas Hobbes (1588-1679) was by geleentheid van mening dat hy aldrie hierdie probleme “opgelos” het!

Binne die kader van die Euklidiese meetkunde was dit moontlik (en sedert die Grieke bekend) om die wortels van die volgende tipe algebraïese vergelyking met behulp van ’n liniaal en ’n passer te konstrueer: $ax^2 + bx + c = 0$ (waar a, b en c heelgetal-veelvoude van ’n gegewe lengte voorstel).

Wanneer ’n *veelheid terme* (dit wil sê ’n *poli-nomia*) opgetel, afgetrek of vermenigvuldig word en daar konstantes, veranderlikes en eksponente aanwesig is, ontmoet ons ’n *polinoom*. Indien ’n nie-zero polinoom rasionale koëffisiënte besit word enige wortel daarvan aangedui as ’n *algebraïese getal*. Die vierkantswortel van 2 is byvoorbeeld ’n algebraïese getal, want dit is die wortel van $x^2 - 2 = 0$.

In 1844 het die Franse wiskundige, Liouville, daarin geslaag om ’n groep getalle te konstrueer wat nie algebraïes is nie – dit staan bekend as die Liouville-getalle. Só ’n getal is byvoorbeeld: 0.1001000100001...[11] Die implikasie van hierdie nuwe getalle is dat wiskundiges vandag verkieslik praat van die *reële getalle* – ’n

11 Die getalswaardes van 1!, 2!, 3! – d.w.s. van $1 \times 1 = 1$, van $1 \times 2 = 2$, van $1 \times 2 \times 3 = 6$ – word gebruik om te bepaal wanneer daar in die desimale ontwikkeling van hierdie getal ene moet voorkom (andersins verskyn daar nulle).

getalsisteem wat beide die rasionale en irrasionale reële getalle insluit en wat daarbenewens – vanuit ’n ander hoek gesien – ook beide die algebraïese en die nie-algebraïese reële getalle omvat. Die nie-algebraïese reële getalle staan ook bekend as die *transendente* (of: *transendentale*) getalle.

Die belangrike gesigspunt vir ons besinning oor die agtergrond van die uitdrukking: die “kwadratuur van die sirkel” is dat hierdie Liouville-getalle (transendente getalle) – waar *n* asook *a*, *b*, ..., *q* heelgetalle is wat groter of gelyk is as die getal 2 – nié gekonstrueer kan word met Euklidiese middele nie. Aangesien algebraïese getalle aftelbaar is het Cantor se bewys van die nie-aftelbaarheid van die reële getalle tegelyk aangetoon dat die transendente getalle *nie-aftelbaar* is – sonder dat ’n enkele een daarvan *gekonstrueer* is.

Die probleem rakende die kwadrering van die sirkel is in 1882 tot ’n oplossing gebring toe die Duitse wiskundige C.L.F. Lindemann in die wiskundige tydskrif *Mathematische Annalen* ’n artikel gepubliseer het oor die getal π (*Über die Zahl* π) as transendente getal, waaruit volg dat die “kwadratuur van die sirkel” onmoontlik is.

Hoewel Eudoksus byna tot die ontdekking van die moderne limietbegrip en differentiaal- en integraalrekene gekom het, het die feit dat hy steeds aan ’n *ruimtelike* gesigspunt vasgehou het hierdie deurbraak verhoed. Die grootste bykomende belemmering op die weg na die sinvolle benutting van die moderne wiskundige limietbegrip is egter gegee in Aristoteles se magtige invloed op die ontwikkeling van veral die wiskunde ten opsigte van die aard van die *oneindige*.

6. Die terugkeer na getal

Afgesien van nuanseringsverskille ten opsigte van waar die primaat geleë is, naamlik by ruimte of by getal, het die voortgaande ontwikkeling van die wiskunde steeds binne die kader van hierdie twee kontoere bly beweeg, selfs ten spyte van die vorm-materie problematiek waarin sowel die Griekse as die (vroeë en laat) Middeleeuse denke vasgevang was. Tydens die hoog-Middeleeue meen Thomas Aquinas, byvoorbeeld, dat hoewel bepaalde eienskappe materiegebonde is, daaroor tog nagedink kan word onafhanklik van materie. Dit is die geval met die gegewens waarmee die wiskunde besig is, naamlik *lyne* en *getalle* (sien Bodewig, 1932; Hersh, 1997:107). Die beperking in die wiskunde in hierdie verband is die gevolg van Aristoteles se siening dat die oneindige slegs *potensieël* bestaan, maar nie *aktueel* nie. Die *potensieël-oneindige* dui op dit wat letterlik *sonder einde* is, *on-eindig* – en dit is teenoor die *aktueel-oneindige* gestel. Die sigself-denkende (vormgewende) God van Aristoteles, soos Origenes reeds aangevoer het, kon slegs dit wat *begrens* is dink en derhalwe kon God nie self *onbegrens* of *oneindig* wees nie (soos die *apeiron*, die oneindig-onbegrensde). Die eerste denker wat daartoe oorgegaan het om God as *oneindig* aan te dui, was Gregor van Nyssa (335/340-394 n.C. – sien Mühlenberg, 1966:26).

Augustinus borduur hierop voort deur te onderskei tussen die menslike verstand wat ’n getalsmenigvuldigheid slegs in suksessie kan dink, en God wat elke oneindigheid – ook die ry van alle getalle – opeens (gelyktydig) kan oorsien, sonder *voor* en *na* (sien Augustinus, 1931, Boek XII, Hoofstuk 19 en vergelyk ook Heimsoeth, 1922:68).

In die Griekse kultuur was die goddelike werkmeester (demiurg) begrens en die (vormlose) materie onbegrens. Sedert Gregor van Nyssa en Augustinus *is* God die aktueel-oneindige en kan hy dit opeens begryp, terwyl die werklikheid *eindig* is. Cusanus sou egter, in die oorgang van die Middeleeue na die vroeg-moderne era, die oortuiging verdedig dat God *aktueel-oneindig* is en dat die skepping bloot *potensieel-oneindig* (of *eindeloos*) is. Sedertdien verdedig die teologie die siening dat die wiskunde beperk is tot die *eindelose,* omdat dit nie die (egte/eintlike) oneindigheid van God kan omvat nie. Aan die einde van die 18de eeu word hierdie tradisie voortgesit in die denke van Maimon wanneer hy, in ’n poging om die antinomieë in die wiskunde op te los, onderskei tussen ’n *begrensde* en ’n *absolute* verstand (Maimon, 1790:227). Hy beskou die volledige ry van alle natuurlike getalle en kom dan tot die gevolgtrekking dat dit nie ’n voorwerp is wat in ons aanskouing gegee kan word nie. Die menslike rede verstrengel sigself in teensprake, indien dit iets wat nie as ’n objek gegee is nie desnietemin as ’n objek beskou. Hy bied die volgende oplossing aan. Aangesien ons waarneming aan die vorm van die tyd gebonde is, kan ons ’n oneindige getal slegs as ’n onvoltooibare oneindige suksessie in die tyd voortbring. In die geval van ’n absolute verstand daarenteen, word die begrip van ’n oneindige getal, sonder tydsverloop opeens gedink: “Daarom is dit wat die verstand in die begrensing daarvan as ’n blote idee beskou, ooreenkomstig die absolute bestaan daarvan ’n reële objek” (Maimon, 1790:228).

Hoewel Descartes, met die ontdekking van die analitiese meetkunde, die eerste beduidende tree terug na die *aritmetisering* van die wiskunde gegee het, sou die moderne wiskunde die gesag van Aristoteles insake die aktueel-oneindige lank kontinueer. Die wiskunde het gedurende hierdie periode, tot aan die einde van die 19de eeu, slegs die bestaansreg van die *potensieel-oneindige* erken. Deurdat die *prins* van die wiskunde, Carl-Friedrich Gaus, bowendien sy instemming aan hierdie beperking in ’n brief aan Schumacher (in 1831) verbind het, wou dit voorkom asof hierdie siening onbepaald sou bly heers. Becker merk immers tereg op:

> Die deurslaggewende insig van Aristoteles was dat oneindigheid net soos kontinuïteit bloot ‘potensieel’ bestaan en daarom geen egte aktualiteit besit nie en gevolglik altyd onvoltooid bly. Tot by Georg Cantor, wat in die tweede helfte van die 19de eeu hierdie tese met sy ‘versamelingsleer’ sou tegemoet tree, waarin hy aktueel-oneindige versamelings in oënskou neem, het die Aristoteliese grond-konsepsie van oneindigheid en kontinuïteit die nooit-bevraagtekende algemene besit van alle wiskundiges (indien nie ook van alle filosowe nie) gebly (Becker, 1964:41).

Die belangrikste gevolg van die gekontinueerde oorheersing van die potensieel-oneindige is dat dit selfs groot wiskundiges daartoe verlei het om met behulp van sirkel-redenasies te kom tot ’n verantwoording van die aard van *reële getalle*.

7. Die sirkel-redenasie in die aanvanklike invoering van reële getalle

Toe Newton en Leibniz die sogenaamde “infinitesimaalrekene” in die 17de eeu ontdek het was daar nog geen duidelikheid oor die grondslae van hierdie nuwe vertakking van die wiskunde nie. Met verloop van tyd sou dit blyk dat die hantering van *grenswaardes* (“limiete”) ’n probleemarea blootgelê het wat deur verdere wiskundige ontwikkelinge bemeester moes word. Dit sou blyk dat midde-in hierdie problematiek die aard van oneindigheid ’n sleutelrol sou vervul.

In die aanhaling van Becker hierbo, rakende Aristoteles se invloed op die afwysing van die aktueel-oneindige, is vlugtig verwys na Cantor (1845-1918) se versamelingsleer waarin die *aktueel-onein-*

dige vrugbaar gebruik is. Met die ontwikkeling van die versamelingsleer het Cantor voortgebou op die nuwe benadering wat sy leermeester, Karl Weierstrass (1815-1897), gevolg het. In sy beroemde Franse leerboek (1821) oor die wiskundige analise het Cauchy (1789-1857) irrasionale getalle probeer definieer as limiete van konvergerende rye rasionale getalle. Die probleem is dat geen irrasionale getal uit enige konvergensieproses kan *ontstaan* nie, eenvoudig omdat die limiet-waarde van ’n konvergerende ry rasionale getalle rééds ’n getal moet wees, alvorens dit as grenswaarde of limiet kan optree.[12]

Indien ons die bogemelde voorbeeld insake $\sqrt{2}$ opnuut oordink dan sal ons onmiddellik besef dat die onderskeie benaderingsrye (van links en van regs) element vir element uit *rasionale getalle*, d.i. egte breuke, bestaan en dat ons pas vantevore (voetnoot 6) aangetoon het dat $\sqrt{2}$ nooit as ’n breuk (soos *a*/*b*) voorgestel kan word nie. Wanneer ons derhalwe opmerk dat die grenswaarde (limiet) van beide rasionale benaderingsrye is, veronderstel hierdie opmerking dat $\sqrt{2}$ ’n getal *is*:

$$\tfrac{1}{1} < \tfrac{7}{5} < \tfrac{41}{29} < \tfrac{239}{169} < \tfrac{1393}{985} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \tfrac{577}{408} < \tfrac{99}{70} < \tfrac{17}{12} < \tfrac{3}{2}$$

Boyer praat in hierdie verband van die sirkel-redenasie (*petitio principii*) in die argumentasie van Cauchy, terwyl die Nestor van die versamelingsleer in Duitsland, Adolf Fraenkel (1891-1965), ook hier melding maak van ’n *sirkel-redenasie*. Boyer verwys byvoorbeeld na pogings om die *petitio principii* van Cauchy te vermy: “Attempts, similar to those of Weierstrass and Méray, to avoid the *petitio principii* in Cauchy’s reasoning on limits and irrational numbers were developed and published, also in 1872, by Cantor and by Heine” (Boyer, 1959:289-290).

Solank aan ’n *benaderingsry* vasgehou word, kan hoogstens gestel word dat die elemente van ’n konvergerende ry rasionale getalle

12 In sy handboek van 1821 tipeer Cauchy die afgeleide van ’n gegewe bewegende punt as the “derniére raison des différences infiniment pitites Dy et Dx” (as die “ekstreme ratio van die verskil tussen die oneindig-kleine Dy en Dx”) en daarin maak hy van ’n onverantwoorde oorgang van die *ratio* van oneindig-kleine getalle tot die *ratio* van normale getalle wat *toereikend klein* is, gebruik.

willekeurig naby aan die grenswaarde (limietaarde) daarvan gebring kan word. Die implisiete veronderstelling wat aan hierdie formuleringswyse ten grondslag lê is gegee in die aanname dat hierdie opeenvolging eindeloos voortgesit kan word. Dit benut derhalwe wat Aristoteles die *potensieel-oneindige* genoem het en wat ons ook sou kon aandui as die *suksessief-oneindige*. Elke term wat voorkom in die twee benaderingsrye tot $\sqrt{2}$ hierbo bly 'n breuk, hoe dig dit ookal tot $\sqrt{2}$ nader.

8. Die baanbrekende werk van Weierstrass, Cantor en Dedekind

Die nuwe weg wat Weierstrass gebaan het, is om van die totaliteit van alle breuke wat kleiner is as $\sqrt{2}$ te praat. Fraenkel verduidelik dit soos volg:

> So verskyn byvoorbeeld die 'irrasionale getal' $\sqrt{2}$ ... as die snit waarvan die boonste klas gekonstitueer word deur die totaliteit (*Gesammtheit*) van positiewe rasionale getalle wat groter as 2 is. Daar moet duidelik op gewys word dat met hierdie gedagtegang nie 'n soort bestaansbewys of reken-metode vir die irrasionale getalle gegee moet word nie, maar 'n *definisie* van die nuwe getalle op grond van die reeds bekende getalle; elke ander opvatting bevat 'n sirkel-redenasie (Fraenkel, 1930:283).

Op dieselfde bladsy voeg Fraenkel nog die volgende opmerking hieraan toe:

> 'n Bewering soos dié dat die rasionale getallery wat na vore gebring is die grenswaarde $\sqrt{2}$ besit, is eers dan sinvol wanneer die getal $\sqrt{2}$ reeds gedefinieer is.

Die grondleggende insig wat hier van deurslaggewende belang is, is dat die definisie van irrasionale getalle nie afhanklik gestel moet word van die limiet-begrip nie. Die bekende definisie wat vandag vir 'n limiet gegee word gryp terug na 'n artikel wat Heine in 1872 gepubliseer het. In wiskunde-handboeke lui dit sedertdien soos volg:

> In die algemeen word 'n getal *l* die limiet van 'n ry (x_n) genoem, wanneer daar vir 'n willekeurige $0 < \varepsilon$ natuurlike getal n_0 bestaan sodanig dat dat $|x_n - l| <$ vir alle $n > n_0$.

Vergelyk hierby Heine se oorspronklike uiteensetting van 1872. Hy begin deur eers 'n *Elementarreihe* te definieer: "Elke getallery waarin die getalle a_n, met 'n groeiende indeks *n*, benede elke aangeebare grootte daal, heet ’n elementêre ry” (Heine, 1872:174). In hierdie eerste afdeling van sy artikel wys Heine daarop dat die woord “getal” konsekwent “rasionale getal” beteken. ’n Meer *algemene getal* (of ’n *getalsteken*) is die *teken* wat by ’n getallery hoort. Hierdie meer algemene getalle sal dan, selfs al mag dit in besondere gevalle rasionaal wees, aangedui word as irrasionale getalle van die eerste orde. Wanneer geen orde bedink word nie, staan die irrasionale getalle teenoor die rasionale getalle (Heine, 1872:180). Ten slotte fundeer hy die bestaan van irrasionale getalle deur middel van die volgende *Lehrsatz*: “Wanneer *a* ’n positiewe, nie-kwadraat, heelgetal aandui, besit die vergelyking $x^2 - a = 0$ geen heelgetal wortel en gevolglik ook geen rasionale wortel nie. Dit besit egter aan die linkerkant vir bepaalde onderskeie waardes van *x* teenoorgestelde voortekens sodat die vergelyking ’n irrasionale wortel besit. Hierdeur is bewys, dat nie alle getalstekens tot rasionale getalle gereduseer kan word nie, *want daar bestaan ook irrasionale getalle*” (Heine, 1872:186).

Cantor wys daarop dat hierdie artikel van Heine eintlik aanleun op sy eie gedagtes wat mondeling aan Heine oorgedra is en wat ook in ’n artikel oor trigonometriese rye in dieselfde jaar deur Cantor gepubliseer is (sien Cantor, 1962:385 en bladsye 93, 95). Terloops kan opgemerk word dat in laasgenoemde artikel ook belangrike aanknopingspunte vir die 20ste eeuse ontwikkeling van die topologie aangetref word, met name insake die idee van die *omgewing van ’n punt* (*Umgebung eines Punktes*) (vgl. Cantor, 1962:98).

In 1872 het Dedekind dieselfde siening verwoord in sy geskrif oor kontinuïteit en irrasionale getalle. Hy skryf: “‘n Mens sê dat ’n veranderlike grootte *x*, wat suksessief-bepaalde getalswaardes deurloop, tot ’n vaste grenswaarde nader, wanneer *x* in die loop van die proses definitief tussen twee getalle teregkom waartussen *a* self geleë is, of, wat dieselfde is, wanneer die verskil $x - a$ absoluut genome benede elke gegewe, van nul onderskeie, waarde definitief daal” (Dedekind, 1872:20).

Cantor maak gebruik van “Fundmentalreihe” in sy verantwoording van die aard (en bestaan) van irrasionale getalle en wys ook eksplisiet daarop dat so ’n *Fundmentalreihe* onderskei moet word van die grenswaarde van ’n konvergerende getallery. Hy meld die logiese denkfout wat hier gemaak word:

> ŉ Mens moet goed aandag gee aan hierdie kardinale punt, want die betekenis daarvan kan maklik oorsien word: .... ŉ getal soos *b* word byvoorbeeld nie gedefinieer as 'grens' van die geledinge a_ν van ŉ *Fundmentalreihe* (a_ν) nie; want dit sou tot ŉ soortgelyke logiese fout lei as wat ons in die bespreking van die eerste definisie-vorm na vore gebring het, en wel op grond daarvan dat dan die *bestaan* van die limiet $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu$ aangeneem word; terwyl die saak omgekeerd veeleer so daar uitsien dat deur die voorafgaande definisies van die begrip *b* bedink is met sulke eienskappe en relasies tot die rasionale getalle dat daaruit met logiese evidensie tot die gevolgtrekking gekom kan word dat die limiet $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu$ bestaan en gelyk is aan *b* (Cantor, 1962:187).

Boyer verduidelik hierdie situasie deur daarop te wys dat Weierstrass die probleem-vraag na die *bestaan* van ŉ limiet van ŉ konvergerende ry besleg deur hierdie ry *self* tot die getal of limiet te maak.[13] Sy verwysing na "an unordered aggregate" appelleer op die *Mengenlehre* (versamelingsleer) van Cantor. Laasgenoemde omskryf in een van sy gerypte artikels (uit die jaar 1897) ŉ versameling as die samevatting *M* van welonderskeie objekte *m* van ons aanskouing of van ons denke (wat die "elemente" van *M* genoem word) tot ŉ geheel (Cantor, 1962:282).

Wanneer Weierstrass ŉ *hele* konvergerende benaderingsry in oënskou neem beskou hy dit as iets wat *opeens* voorhande is, wat *gelyktydig* gegee is. Boyer verduidelik dat Weierstrass se bedoeling was om homself te bevry van die idee van die kontinue vloei van ŉ veranderlike, omdat dit vae (in-eksakte) bewegingsvoorstellinge oproep. As alternatief bied hy ŉ statiese aritmetiese teorie van veranderlikes aan met behulp waarvan die aard van reële getalle verantwoord kan word. Wat merkwaardig in hierdie ontwikkeling is, is dat

13 "In a sense, Weierstrass settles the question of the *existence* of a limit of a convergent sequence by making the sequence (really he considers an unordered aggregate) itself the number or limit" (Boyer, 1959:286). Dedekind se "snit"-idee bereik dieselfde resultaat. In Cantor se siening van die kontinuum as ŉ *perfek-samehagende* versameling (sien Cantor, 1962:192-194) verteenwoordig die idee van "perfektheid" – ŉ versameling heet *perfek* wanneer elke punt van die versameling ŉ limietpunt is en wanneer alle limietpunte van die versameling tot die versameling behoort – Dedekind se snit-gedagte (vgl. Dedekind, 1872:11).

dit juis die probleem van *veranderlikheid* was wat tot Zeno se paradokse aanleiding gegee het en gevolglik uit die Griekse wiskunde verban is. Veral in die denke van Newton sou dieselfde idee van 'n veranderlike[14] egter 'n belangrike bydrae lewer tot sy siening van die "infinitesimaal-rekene". Tegelyk sou die volgende tweehonderd jaar se ontwikkelinge, volgens Boyer, opnuut tot die eliminering van 'n dinamiese idee van 'n veranderlike lei. Hy skryf:

> Nevertheless, as the culmination of almost two centuries of discussion as to the basis of the new analysis, the very aspect which had led to its rise was in a sense again excluded from mathematics with the so-called "static" theory of the variable which Weierstrass had developed. The variable does not represent a progressive passage through all the values of the interval, but the disjunctive assumption of any of the values in the interval (Boyer, 1959:288).

Langs hierdie weg word die getal $\sqrt{2}$ nou gedefinieer "as the ordered aggregate of all rational numbers whose squares are less than two" (Boyer, 1959:293). Lorenzen wys daarop dat in hierdie benadering elke reële getal as 'n oneindige desimaalbreuk voorgestel word asof die oneindige aantal syfers daarvan almal tegelyk bestaan.[15]

In die algemeen is die bedoeling van hierdie benadering van Weierstrass om weg te doen met enige empiriese appèl op "kontinue veranderlikes": "It specifies only an infinite, discrete multiplicity of elements" (Boyer, 1959:294).[16]

9. Bevraagtekening van 'n onderliggende aanname in hierdie ontwikkeling

Weierstrass se bandering berus op die idee dat, byvoorbeeld, alle reële getalle opeens as 'n *geheel* of *totaliteit voorhande* is, *gegee* is. Met ander woorde, die onderliggende aanname is die idee van 'n *oneindige totaliteit*, wat bloot 'n alternatiewe formulering van die

14 Vergelyk sy siening van 'n "fluxion" = die tempo van verandering.

15 "als ob die unendlich vielen Ziffern alle auf einmal existierten" (Lorenzen, 1972:163).

16 Dit beantwoord aan drie kondisies: "the set [is] ordered, dense, and perfect" (Boyer, 1959:294).

idee van die *aktueel-oneindige* is – soos geïmpliseer in die weergawe van Boyer wat ons pas aangehaal het – dit gaan om “an infinite, discrete multiplicity of elements”.

Boyer meen dat die invoering van “uniform motion into Newton’s method of fluxions was an irrelevant evasion of the question of continuity ... There is nothing dynamic in the idea of continuity” (Boyer, 1959:294). Hy gaan dan voort deur vanuit die perspektief van sintuiglike waarneming die argument te voer dat ons nie met sekerheid kan sê dat die beweging wat ons waarneem ’n kontinuum daarstel nie. Waarnemingsruimte blyk *diskontinu* te wees: “The experiments of Helmholtz, Mach, and others have shown that the physiological spaces of touch and sight are themselves discontinuous” (Boyer, 1959:294-295).[17]

Cantor se tydgenoot, Leopold Kronecker (1823-1891), is as een van die grootste wiskundiges van sy tyd gewaardeer, onder meer bevestig deur die feit dat hy ’n leerstoel in Berlyn beklee het. In ’n brief van Kronecker aan Cantor (21 Augustus, 1884) stel hy dit eksplisiet dat sy strewe was om alles in die suiwere wiskunde tot die teorie van die heelgetalle terug te voer – en hy is oortuig dat dit deurgaans sal slaag.[18] In sy hoflike antwoord wys Cantor daarop dat hy “transfinite getalle” in gedagte het wat ten beste in die begrip van ’n *welgeordende versameling* (*wohlgeordneter Menge*) gefundeer kan word (brief opgeneem in Meschkowski, 1967:241).

Teen 1899 het Cantor egter reeds besef dat sy versamelingsbegrip problematies is en gevolglik het hy van “inkonsistente versamelings” gepraat – in ’n brief van 28 Julie 1899 aan Dedekind (sien Cantor, 1962:443). Dit handel hier oor die oorbekende ontdekking van Russell insake die versameling C wat as elemente al dié versamelings besit wat sigself nie as elemente besit nie. Die kritiese vraag is dan of C ’n element van sigself is al dan nie? Indien wel, moet C

17 Die sensitiwiteit van die menslike huid mag twee naald-prikke ervaar as op dieselfde plek selfs al was die prikkel op twee fisies-onderskeie plekke. Wat derhalwe fisies *diskontinu* is, mag in ’n sensitief-psigiese sin as *kontinu* ervaar word (sien ook Gosztonyi, 1976, I:13).

18 “Alles in der *reinen* Mathematik auf die Lehre von den ganzen Zahlen zurückzuführen, und ich *glaube* dass dies durchweg gelingen wird” (sien Meschkowski, 1967:238).

aan die vereiste vir element-wees beantwoord, naamlik dat dit sigself nié as element bevat nie, en omgekeerd – waaruit volg dat C ’n element van sigself is as en slegs as dit nié ’n element van sigself is nie.[19]

Hierdie ontdekkings het bekend geword pas nadat Poincaré by die tweede Internasionale Wiskunde Kongres (Parys, 1900) die trotse stelling gemaak het: “Today there remain in analysis only integers and finite or infinite systems of integers . . . Mathematics . . . has been arithmetized ... We may say today that absolute rigor has been obtained” (sien Poincaré, 1902 en Fraenkel *et al.,* 1973:14).

Een reaksie op hierdie impasse was om ’n stel aksiomas te formuleer wat dit onmoontlik maak om C daaruit af te lei (vgl. Zermelo, 1908 – sy sisteem is later deur Fraenkel uitgebrei en dit staan sedertdien as die *Zermelo-Fraenkel versamelingsteorie* bekend). Russell (en Frege reeds vroeër) het probeer om die probleem in sy logisisme te omseil deur gebruik te maak van ’n hiërargie van tipes (sy sogenaamde “ramified type theory”). Hy was van mening dat die wiskunde tot die logika herlei kan word,[20] maar moes uiteindelik toegee dat die oneindigheidsaksioma hierdie herleidingspoging gefnuik het. Fraenkel *et al.* merk op: “It seems, then, that the only really serious drawback in the Frege-Russell thesis is the doubtful status of InfAx [the Axiom of Infinity], according to the interpretation intended by them” (Fraenkel *et al.,* 1973:186). Oorbekend is ook die deurslaggewende bewys van Kurt Gödel in 1931 (op 25 jarige ouderdom) insake die strewe van Hilbert se aksiomatiese formalisme om te bewys dat die wiskunde nie-strydig is. Gödel het bewys dat as enige formele teorie *T*, wat toereikend is om die teorie van die heelgetalle in te sluit, konsistent is, dan is *T* onvolledig. Soos Grünfeld dit stel: “The price of consistency is incompleteness” (Grünfeld, 1983:45 – sien ook Hofstadter, 1980:86-87).

’n Alternatiewe reaksie het vanuit die hoek van die Nederlandse wiskundige, L.E.J. Brouwer (1881-1966), gekom. Sy kritiek is onder meer afgestem op die gebruik van die aktueel-oneindige in die wiskunde. Dit

19 Zermelo het onafhanklik van Russell hierdie kontradiksie ontdek (sien Husserl, 1979:xxii, 399 en verder).

20 Russell was oortuig dat die wiskunde niks anders as logika is nie en tewens daarmee saamval: “mathematics and logic are identical” (Russell, 1956:v).

geskied reeds in sy proefskrif van 1907 (*Over de Grondslagen der Wiskunde*), maar veral ook in sy kritiek op die algemene gebruik van die logiese beginsel van die uitgeslote derde (sien Strauss, 1991) en talle belangrike artikels wat veral in die tydskrif *Mathematische Annalen* verskyn het. Nadat David Hilbert (1862-1943) in 1912 die faam by die Fransman Henri Poincaré (1854-1912) oorgeneem het as die grootste wiskundige van sy tyd, het een van sy skranderste studente, Hermann Weyl, 'n voordrag van Brouwer oor die onbetroubaarheid van die logiese beginsels aangehoor en dit het hom oorreed om die aksiomatiese formalisme van Hilbert vaarwel toe te roep, sodat hy sy wiskundige denkkrag by die intuïsionisme se benadering kon inwerp.

Poincaré was ook 'n intuïsionis en hy het in 'n reeks voordragte in 1910 ook aan die transfinite getalle van Cantor aandag gegee. Cantor het die magtigheid (kardinaliteit) van die kleinste transfinite kardinaalgetal (1, 2, 3, ...) aangedui as Aleph-Nul ($\aleph_0$) en met behulp van die magsversameling van $\aleph_0$ (dit is die versameling van alle deelversamlings van $\aleph_0$) sy tweede transfinite kardinaalgetal, $\aleph_1$, gevind. Poincaré bevraagteken egter die bestaan van $\aleph_1$ deur te stel: "Wat nou die tweede transfinite kardinaalgetal $\aleph_1$ betref, is ek nie heeltemal seker dat dit bestaan nie" (Poincaré, 1910:48). Waaroor hy egter wél sekerheid besit is dat die *aktueel-oneindige* in elk geval nie bestaan nie ("Ein aktual Unendliches gibt es jedenfalls nicht" – Poincaré, 1910:48).

Gegewe die intellektuele status en roem van Hermann Weyl as wiskundige is dit lonend en betekenisvol om saaklik aan sy reaksie op die klassieke reële analise aandag te gee.

10. Hermann Weyl se kritiek op die wiskundige analise

Soos aan die begin vermeld skryf Hermann Weyl: "Indien 'n mens ten slotte 'n kort slagwoord wil aangee wat die lewende sentrum van die wiskunde betref, dan durf 'n mens wel sê: dit is die *wetenskap van die oneindige*" (Weyl, 1966:89). Hierdie tipering is ook te vind in sy waardering van 'n halwe eeu se wiskunde: "Mathematics has been called the science of the infinite" (sien Weyl, 1951:523). Wat vir hom sonderling is van die 20ste eeuse wiskunde, is die geweldig-toenemende rol wat die aksiomatiese benadering daarin speel.

Die gangbare standaard formulering van die kontemporêre limietbegrip wat ons hierbo aangehaal het word krities in verband met konvergensie deur Weyl beoordeel. Hy wys daarop dat die *statiese element* in hierdie formulering opgesluit lê in die onbegrensde aanwending van terme soos “daar bestaan” en “alle” op die natuurlike getalle. Hy praat hier ook van die aanname van die “oneindige alheid van getalle” (*die unendliche Allheit der Zahlen* – sien Weyl, 1931:11) maar kies dan (saam met Brouwer) vir die siening van die oneindige as ’n *oop veld van moontlikhede* (Weyl, 1931:17).

Ons het vroeër gesien hoedat Weierstrass meen sy statiese siening van alle reële getalle as ’n oneindige totaliteit berus op sy oortuiging dat hy *suiwer* aritmeties te werk gaan in sy verstaan van ’n veranderlike. Weyl meen hierteenoor dat ’n suiwere getalsbenadering geensins ’n motief bied vir die invoering van die *aktueel-oneindige* nie:[21]

> Neem ’n mens die wiskunde alleen op sigself, dan beperk ’n mens jou tot die insigtelike waarhede waarin die oneindige slegs as ’n oop veld van moontlikhede opgeneem word; daar kan geen motief gevind word wat dring om daarbo uit te gaan nie (Weyl, 1931:17-18).[22]

Weyl merk tewens op dat hy in sy uiteensetting in hierdie voordrag (“Die Stufen des Unendlichen”) op ’n uitgebreide wyse die Nederlandse wiskundige, Brouwer, volg. Laasgenoemde het, volgens Weyl, hierdie insigte konsekwent uitgewerk in sy intuïsionistiese standpunt in die wiskunde (“intuitionistischen Standpunkt in der Mathematik”) (Weyl, 1931:8). Die spanning tussen die *potensieel-oneindige* and die *aktueel-oneindige* dui Weyl ook aan met die terme *moontlikheid* en *syn*.

’n Aantal jare later publiseer Weyl ’n insiggewende artikel oor “Mathematics and Logic” as ’n oorsig-voorwoord tot ’n beoordeling van die werk *The philosophy of Bertrand Russell*. In verband met die aksiomatiek is daar, volgens Weyl, een gegewe wat nie geforma-

21 Vanuit die hoek van sy konstruktiewe wiskunde verklaar Lorenzen later ook ondubbelsinnig dat die getalleleer geen motief bevat vir die invoering van die *aktueel-oneindige* nie: “In der Arithmetik … liegt kein Motiv zur Einführung von Aktual-Unendlichen vor” (Lorenzen, 1972:159).

22 Heyting wys ook daarop dat probleme slegs ontstaan wanneer dit gaan oor die totaliteit van heelgetalle: “Difficulties areise only where the totality of integers is involved” (Heyting, 1971:14).

liseer kan word nie, naamlik “iterasie” (opeenvolging), wat ŉ beliggaming van die beginsel van (volledige) wiskundige *induksie* is (Weyl, 1946:3). Vanuit intuïsionistiese standpunt, so merk Weyl elders op, bewaar *volledige induksie* die wiskunde daarvan om ŉ *enorme toutologie* te wees (Weyl, 1966:86).

Wanneer Weyl Brouwer se intuïsionistiese wiskunde bespreek begin hy met die opmerking dat Brouwer dit duidelik gemaak het, “as I think beyond any doubt, that there is no evidence supporting the belief in the existential character of the totality of all natural numbers, and hence the principle of the exluded middle in the form ‘Either there is a number of the given property γ, or all numbers have the property $\neg\gamma$’ is without foundation” (Weyl, 1946:9).

Wat hier dus volledig afgewys word deur Weyl (en Brouwer) is die sleutel-idee wat ten grondslag lê aan Weierstrass (en Cantor) se ganse wiskunde, naamlik die idee van *oneindige totaliteite*. Ons het vermeld dat Weyl *moontlikheid* aan die *potensieël-oneindige* verbind en *syn* aan die *aktueel-oneindige*. Hy het daarom hierbo van die “eksistensiële aard” van die totaliteit van natuurlike getalle gepraat. Nog sterker stel hy dit soos volg: “Brouwer opened our eyes and made us see how far classical mathematics, nourished by a belief in the ‘absolute’ that transcends all human possibilities of realization, goes beyond such statements as can claim real meaning and truth founded on evidence” (Weyl, 1946:9). Volgens Brouwer is die klassieke logika geabstraheer vanuit die wiskunde van *eindige versamelings* en hul *deel-versamelings*. Deur hierdie beperkte ontstaanskonteks te vergeet is die logika daarna misverstaan as iets wat *bo* en *voor* alle wiskunde staan en wat uiteindelik sonder enige regverdiging op die wiskunde van oneindige versamelings toegepas is.[23] Weyl se oordeel oor hierdie ontwikkeling hou klaarblyklik verband met die opmerking wat David Hilbert in 1925 in ŉ voordrag oor die nagedagtenis van Weierstrass gemaak het. Hy het oor die oneindige gepraat en sy voordrag is daarna in *Mathematische Annalen* gepubliseer. Sy beroemde positiewe waardering van die nalatenskap van Georg Cantor het hy ondubbelsinnig laat

23 “Forgetful of this limited origin, one afterwards mistook that logic for something above and prior to all mathematics, and finally applied it, without justification, to the mathematics of infinite sets” (Weyl, 1946:10).

blyk met die woorde: “Uit die paradys wat Cantor vir ons geskep het, sal niemand ons kan verdryf nie” (Hilbert, 1925:170). Weyl verwys in 1946 na iets wat op die paradystoestand van die wiskundige versamelingsleer gevolg het, naamlik die benutting van die idee van oneindige totaliteite. Hy skryf: “This is the Fall and original sin of set-theory, for which it is justly punished by the antinomies” (Weyl, 1946:10).

Wanneer oneindige totaliteite egter afgewys word, word ook afskeid geneem van die *statiese* domein van reële getalle soos wat dit deur Weierstrass, Dedekind en Cantor benut is, aangesien die oneindige op ’n vry-wordende moontlikheid berus (Weyl, 1931:8). Die begrip van ’n *reële getal* ontvang nou ’n *benaderingsinhoud*. Die graad van benadering kan verby elke grens gevoer word – wat soos volg geformuleer kan word: “’n reële getal is ’n oneindige suksessie [*Folge*] van duaal-intervalle *i*, *i’*, *i”*, ... waarmee dit so gesteld is dat elke interval in hierdie ry [*Reihe*] die naas-volgende een volkome inwendig bevat” (Weyl, 1921:49). Ook ten opsigte van die *kontinuum* word afgestap van die idee van ’n staties-gegewe, oneindige totaliteit en wel deur van opeenvolgende, voortgaande *verdelings* van ’n *geheel* uit te gaan. Kontinuïteit word gekonstitueer deur die relasie tussen ’n *geheel* en die *dele* daarvan. Daarom skryf Weyl: “Nie in die relasie van element tot versameling nie, maar in dié van ’n *deel* tot die *geheel* sien Brouwer, in ooreenstemming met die intuïsie, die wese van die kontinuum” (Weyl, 1966:74). Vroeër merk hy kortweg op: “Dat dit dele het is ’n grondeienskap van die kontinuum” (Weyl, 1921:77). Die kontinuum van Brouwer word gevolglik nie opgelos in ’n versameling van voltooid-bestaande reële getalle nie, aangesien dit veeleerder ’n *medium van vrye wording* is.[24] ’n Punt is bloot die voorstelling van die grens van ’n deling wat tot in die oneindige voortgesit is (Weyl, 1921:77).

24 “Die Brouwersche Bemerkung ist einfach, aber tief: hier entsteht uns ein ‘Kontinuum’, in welches wohl die Einzelnen reellen Zahlen hineinfallen, das sich aber selbst keineswegs in eine Menge fertig seiender reeller Zahlen auflöst; vielmehr ein *Medium freien Werdens*” (Weyl, 1921:50). [“Die opmerking van Brouwer is eenvoudig, maar diepsinnig: hier ontstaan vir ons ’n ‘kontinuum’ waarin die individuele reële getalle wel ’n plek vind, maar wat self egter geensins opgelos word in ’n versameling van voltooid-bestaande reële getalle nie; veeleerder is dit ’n medium van vrye wording”]

Terloops moet hierby opgemerk word dat die vroeër vermelde omskrywing wat Cantor van 'n versameling gegee het ook gebruik maak van die idee van 'n *geheel* met sy *dele*. Cantor het immers gestel dat die menigvuldigheid elemente van 'n versameling saamgevat word tot 'n *geheel*. Daarom behoort dit ons nie te verbaas nie dat Gödel versamelings beskryf as "quasi-spatial" (sien Wang, 1988:202)![25] As die intuïsionisme in hul beklemtoning van die geheel-dele relasie (kontinuïteit) inderdaad iets wat 'n oorspronklike ruimte-sin besit raakgesien het, impliseer dit dat Weierstrass en Cantor se strewe om *suiwer* aritmeties te werk te gaan ten slotte misluk het. Dieselfde geld dan ook van die idee van 'n *oneindige totaliteit* (geheel), want ons het vroeër vermeld dat beide Weyl en Lorenzen ingesien het dat 'n suiwere getalsbenadering geen motief vir die invoering van die *aktueel-oneindige* bied nie. *Kontinuïteit*, *oneindige verdeelbaarheid* en 'n *oneindige totaliteit* betref probleme en insigte wat deurlopend verwant is aan die samehang en verskil tussen getal en ruimte – of soos Becker dit hierbo gestel het, aan die kloof tussen *heelgetal* en dit wat *kontinu* is. Tog bely Weyl dat die onverklaarbare (misleidende) behoefte wat in ons lewendig is onloënbaar is en dat dit vanuit 'n fenomenale standpunt in die drang na *totaliteit* tot openbaring kom (Weyl, 1966:89).

11. Verdere uiteenlopende oriëntasies

Indien ons enigsins erns sou maak met die tipering wat Weyl van die wiskunde gegee het, naamlik dat dit die *wetenskap van die oneindige* is, dan kan beswaarlik van die volgende opmerking van Hilbert verskil word: "Die oneindige het soos geen ander vraag sedert die vroegste tye die menslike gemoed in beweging gebring nie; die oneindige het soos haas geen ander idee stimulerend en vrugbaar op die verstand ingewerk nie; soos geen ander begrip nie benodig die begrip oneindigheid egter verheldering" (Hilbert, 1925:163).

In die lig van die resultate van Gödel moes Hilbert egter ook in sy bewysteorie gebruik maak van metodes wat intuïsionisties aanvaarbaar is. Die mees teleurstellende effek van Gödel se bewys is egter dat elke *konsistensie-bewys* bo die formalisme van die sis-

25 Wang voeg hieraan die opmerking toe: "I am not sure whether he would say the same thing of numbers" (Wang, 1988:2002).

teem uitgaan en derhalwe altyd in laaste instansie ’n appèl op ’n basiese *insig*, op (’n nie-formaliseerbare) *evidensie* uitoefen. Weyl merk gevolglik tereg op dat dit vir die aksiomatikus, David Hilbert, swaar moes wees om tot die besef te kom dat die *insig van konsistensie* in werklikheid deur middel van intuïtiewe argumentasie verwerf word wat op evidensie en nie op aksiomas berus nie.[26] Hoewel Heyting die basis gelê het vir ’n formalisering van die intuïsionistiese wiskunde, kan so ’n formalisering nooit vir die intuïsioniste as ’n fundering van die wiskunde dien – soos vir die logisiste nie. Beth merk bykomend op: “On the contrary, formalistic expression is in a position to produce no more than an inadequate picture of intuitionism” (Beth, 1965:90). Insgelyks voer Heyting aan dat “every logical theorem ... is but a mathematical theorem of extreme generality; that is to say, logic is a part of mathematics, and can by no means serve as a foundation for it” (Heyting, 1971:6).

Deurdat die intuïsionisme *oneindige totaliteite* verwerp, beteken dit dat hierdie wiskundige benadering die *transfinite getalleleer* van Cantor onaanvaarbaar vind. Heyting merk tewens in sy intreerede as wiskundige in 1948 op dat die transfinite getalleleer niks meer as ’n *hersenchim* is nie (Heyting, 1948:4). Selfs die bekende diagonaalbewys van Cantor insake die nie-aftelbaarheid van die reëele getalle lei tot ’n teenoorgestelde resultaat, indien die aanname van ’n oneindige totaliteit wat daaraan ten grondslag lê nie aanvaar word nie.[27]

26 “It must have been hard on Hilbert, the axiomatist, to acknowledge that the insight of consistency is rather to be attained by *intuitive reasoning* which is based on evidence and not on axioms” (Weyl, 1970:269).

27 Indien die idee van ’n *oneindige totaliteit* aanvaar word voer Cantor se diagonaal-argument tot nie-aftelbaarheid en indien slegs die *potensieël-oneindige* aanvaar word kan nie-aftelbaarheid nie daardeur bewys word nie. Fraenkel en Becker wys albei pertinent hierop. Fraenkel skryf: “Cantor se diagonaal-metode word vir hierdie standpunt nie betekenisloos nie, ... die kontinuum toon sig hiervolgens as ’n versameling waarvan steeds slegs ’n aftelbaar oneindige deelversameling aangegee kan word, en wel deur vooruitvaslegbare konstruksies” (Fraenkel, 1928:239 noot 1). Becker stel in ’n ooreenstemmende sin: “Die diagonaal-metode toon, streng genome, die volgende: Wanneer mens ’n afgetelde (wetmatige) ry van opeenvolgende getalle het, kan ’n ry van opeenvolgende getalle bereken word wat in elke plek van al die voriges verskil” (Becker, 1973:161: noot 2). Teëgestelde oneindigheidsopvattinge lei derhalwe tot ’n teëgestelde uitkoms van die diagonaalbewys! (Hierdie probleem word uitvoerig in Strauss, 2011 behandel.)

In terme van 'n breër perspektief moet kennis geneem word van die volgende merkwaardige historiese feit. In 1781 het Kant sy *Kritik der reinen Vernunft* (*Kritiek van die suiwere Rede*) gepubliseer. Drie van die hoofafdelings van hierdie werk het as vertrekpunt vir drie denkskole in die wiskunde van die 20ste eeu gedien, naamlik die intuïsionisme (Brouwer, Weyl, Heyting, Van Dalen, Troelstra – die *transendentale estetika*), logisisme (Frege, Dedekind, Russell en Gödel – die *transendentale analitika*),[28] en die aksiomatiese formalisme (Hilbert en die meeste moderne wiskundiges – die *transendentale dialektika*).

Teenoor die logisisme handhaaf Hilbert die Kantiaanse siening dat buitelogiese gegewens benodig word. "Reeds Kant het geleer – en dit verteenwoordig 'n integrerende bestanddeel van sy leer – dat die wiskunde oor 'n gewaarborgde inhoud beskik onafhanklik van alle logika en daarom nooit slegs deur logika begrond kan word nie, waaruit volg dat die strewes van Frege en Dedekind moet misluk. Veeleer geld as vooraf-bepaling vir die toepassing van logiese gevolgtrekkings en vir die uitvoering van logiese operasies dat daar reeds in die voorstelling spesifieke buitelogiese konkrete objekte gegee moet wees wat intuïtief as onmiddellike belewing voor alle denke aanwesig is" (Hilbert, 1925:170-171).

Oor die wiskundige status van die intuïsionisme asook die unieke onderskedenheid daarvan skryf Beth: "It is clear that intuitionistic mathematics is not merely that part of classical mathematics which would remain if one removed certain methods not acceptable to the intuitionists. On the contrary, intuitionistic mathematics replaces the methods by other ones that lead to results which find no counterpart in classical mathematics" (Beth, 1965:89).[29] Nogtans is dit sekerlik

28 Die logisisme van beide Frege en Dedekind het met die idee van 'n oneindige totaliteit begin. Dedekind doen dit deur met sy *Gedankenwelt* (verstandswêreld) te begin, "die totaliteit *S* van alle dinge wat 'n objek van my denke kan wees is oneindig" (Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*?, in Dedekind, 1887:14). Tait karateriseer die stellingname van Frege soos folg: "Frege begins, in effect, with the Dedekind infinite set $< S, \emptyset >$ which *S* is the totality of all objects …" (Tait, 2005:249, noot 17).

29 Vergelyk ook die volgende uitspraak: "The special character of intuitionistic mathematics is expressed in a series of theorems that contradict the classical results. For instance, while in classical mathematics only a small part of the real functions are uniformly continuous, in intuitionistic mathematics the principle holds that any function that is definable at all is uniformly continuous" (Stegmüller, 1970:331; see also Brouwer, 1964:79) waaruit die aanhaling hieronder kom.

verkieslik om Brouwer self, 'n bietjie meer uitvoerig, aan die orde te stel oor die ooreenkomste en verskille tussen die intuïsionisme en die klassieke wiskundige analise. Hy stel "that classical analysis … has less mathematical truth than intuitionistic analysis" (Brouwer, 1964:78) en vervolg dan:

> As a matter of course also the languages of the two mathematical schools diverge. And even in those mathematical theories which are covered by a neutral language, i.e. by a language understandable on both sides, either school operates with mathematical entities not recognized by the other one: there are intuitionist structures which cannot be fitted into any classical logical frame, and there are classical arguments not applying to any introspective image. Likewise, in the theories mentioned, mathematical entities recognized by both parties on each side are found satisfying theorems which for the other school are either false, or senseless, or even in a way contradictory. In particular, theorems holding in intuitionism, but not in classical mathematics, often originate from the circumstance that for mathematical entities belonging to a certain species, the possession of a certain property imposes a special character on their way of development from the basic intuition, and that from this special character of their way of development from the basic intuition, properties ensue which for classical mathematics are false. A striking example is the intuitionist theorem that a full function of the unity continuum, i.e. a function assigning a real number to every non-negative real number not exceeding unity, is necessarily uniformly continuous (Brouwer, 1964:79).

Hierdie prentjie word veel breër deur Evert Beth uitgewerk met betrekking tot 'n verskeidenheid ander oriëntasies in die wiskunde wat deur onderskeie wysgerige stellingames geïnformeer is (sien Beth, 1965:161-203). Vanuit 'n anti-Platonistiese vertrekpunt bevraagteken hy selfs die praktyk om in die aksiomatiese versamelingsleer die uiteindelike fundering van die wiskunde te sien. Hy doen dit met 'n beroep op Gödel wat onderskei tussen *fundering* en *eksplisering*.[30]

Enkele dekades gelede het die wiskundige, Morris Kline, 'n duidelik pessimistiese boek oor die verlies aan sekerheid in die wiskunde

30 "In particular, it seems rather dangerous to accept as an ultimate foundation of mathematics a theory so strikingly platonistic as set-theory" (Beth, 1965:162).

gepubliseer: *Mathematics*: *the loss of certainty*. Daarin skryf hy onder meer:

> The developments in the foundations of mathematics since 1900 are bewildering, and the present state of mathematics is anomalous and deplorable. The light of truth no longer illuminates the road to follow. In place of the unique, universally admired and universally accepted body of mathematics whose proofs, though sometimes requiring emendation, were regarded as the acme of sound reasoning, we now have conflicting approaches to mathematics. Beyond the logicist, intuitionist, and formalist bases, the approach through set theory alone gives many options. Some divergent and even conflicting positions are possible even within the other schools. Thus the constructivist movement within the intuitionist philosophy has many splinter groups. Within formalism there are choices to be made about what principles of metamathematics may be employed. Non-standard analysis, though not a doctrine of any one school, permits an alternative approach to analysis which may also lead to conflicting views. At the very least what was considered to be illogical and to be banished is now accepted by some schools as logically sound (Kline, 1980:275-276).

Die aktualiteit van hierdie uiteenlopende oriëntasies word nog steeds gereflekteer in die resente omvangryke Oxford-handboek (833 pp.) tot die *filosofie van die wiskunde en logika* wat in 2005 deur Shapiro as *redakteur* uitgegee is. Daarin tref ons onder meer bydraes aan oor die *empirisme* en *logiese positivisme* (1), oor die *logisisme* (3), oor *Wittgenstein* (1), oor die *formalisme* (1), oor die *intuïsionisme* (3), oor die *naturalisme* (2), oor die *nominalisme* (2) en oor die *strukturalisme* (2).

As gevolg van Russell se (bo-vermelde) ontdekking (rakende die versameling C wat as elemente al dié versamelings besit wat sigself nie as element bevat nie), het Frege die publikasie van die tweede band van sy "Grundlagen der Arithmetik" uitgestel en toe dit tóg in 1903 verskyn het, moes hy toegee dat een van die hoekpilare van sy werk geskud was (vgl. Frege, 1903:251). Hierdie mislukking van sy logisisme het hom uiteindelik, aan die einde van sy lewe, tot die oortuiging gebring dat die *wiskunde wesenlik meetkunde* is:

> So an a priori mode of cognition must be involved here. But this cognition does not have to flow from purely logical principles, as I originally assumed. There is the further possibility that it has a

> geometrical source. ... The more I have thought the matter over, the more convinced I have become that arithmetic and geometry have developed on the same basis – a geometrical one in fact – so that mathematics in its entirety is really geometry (Frege, 1979:277).

Op hierdie punt moet vermeld word dat die voorkeur van die Griekse wiskunde (na die ontdekking van inkommensurabeliteit) vir ’n ruimtelike perspektief vandag nog lewendig is by Franse wiskundiges. Longo merk in ’n meer resente artikel op dat vir Thom en talle ander “mathematicians of the continuum” die “kontinuum ontologies voorafgaan aan die diskrete” en dat laasgenoemde negatief waardeer moet word as “a broken line” (Longo, 2001:6) en ook, in verband met limiete by egalige (gladde) en oneindig-differensieerbare krommes, word dit bestempel as ’n *katastrofe*. Longo stel dat Leibniz en Thom die kontinuum sien as “the original giving, central to all mathematical construction, while the discrete is only represented as a singularity, as a catastrophe” (Longo, 2001:19).

12. ’n Oorkoepelende samevattende perspektief

Die aanvanklike sukses wat opgesluit gelê het in die Pythagoreïese oortuiging dat rasionale verhoudinge alles getalsmatig toeganklik sou maak, het spoedig, in die ontdekking van *inkommensurabele* gegewens, vasgeloop in die probleem van die oneindig-onbegrensde. Die onvermoë om hierdie probleem getalsmatig tot ’n oplossing te bring het daartoe gelei dat die Griekse wiskunde die weg van ’n geometrisering bewandel het. Met ander woorde, in plaas daarvan om die idee van ’n *oneindige totaliteit* te benut, is die aard van getal ondergeskik gemaak aan die ruimte en die meetkunde en is getal ten slotte in ’n ruimtelike konteks behandel. In die werke van Euklides het die leer van getalle gevolglik ’n *onderdeel* van die meetkunde geword.

Nadat hierdie geometrisering lank ’n oorheersende rol sou speel, onder meer in die synsmetafisika van die Middeleeue (waarop ons nie ingegaan het nie), was dit via Descartes dat die moderne tyd ’n toenemende terugkeer na ’n aritmetiese perspektief beleef het. Die ontdekking van die differensiaal- en integraalrekene deur Newton en Leibniz het egter opnuut probleme geskep, met name in die verantwoording van die aard van *limiete*. Die geykte benadering om limiete met behulp van konvergerende rye rasionale getalle te verantwoord het ’n onverantwoorde sirkelredenasie bevat, want om as limiet te kan optree moes elke sodanige limiet rééds ’n getal gewees het.

Skynbaar het Weierstrass daarin geslaag om ’n suksesvolle alternatiewe waardering van ’n veranderlike in sy *statiese* teorie te gee. Limiet-waardes kan willekeurig gekies word uit ’n domein van onderskeie getalle wat as ’n oneindige totaliteit opeens voorhande is. Toe hierdie benadering egter in die versamelingsteorie van Cantor tot Russell (en Zermelo) se kontradiksie lei, het twee teëgestelde reaksies die toneel oorheers. Die eerste was ’n aksiomatisering van die versamelingsleer en die tweede was ’n terugkeer na die oorspronklike Griekse sentimente waar die oneindige bloot as ’n *onvoltooibare suksessie* gesien is.

Die primitiewe binêre predikaat $\in$ wat in die Zermelo-Fraenkel versamelingsleer op “membership” dui (“*x* is a member of *y*”) bevat ’n (ongedefinieerde) appèl op die ruimtelike idee van ’n *totaliteit* of *geheel*. Nogtans het die besinning oor hierdie grondslag-vrae nie daartoe gekom om eksplisiet nader in te gaan op *samehangsmomente* tussen die oorspronklike getalsbesef van suksessie (wat Weyl daartoe gebring het om in volledige induksie die waarborg te vind wat verhoed dat die wiskunde in ’n ernorme toutologie verval nie) en die aard van ons besef van ruimtelike kontinuïteit nie, waarvan die mees prominente moment die idee van ’n oneindige totaliteit is.

Benewens aksiomatisering en ’n terugval op die potensieël-oneindige (suksessief-oneindige) het die kentering by Frege – tot die siening dat die wiskunde wesentlik *meetkunde* is – en by die Franse kontinuumwiskundiges aan ons getoon dat die Griekse geometriseringsalternatief selfs nog steeds in die 20ste en 21ste eeu wiskundige navolging sou vind.

Hoewel *kategorie-teorie* en *topos teorie* op ’n hoër abstraksievlak arbei, ontkom dit nie aan die primitiewe getalsin van ’n *menigvuldigheid* nie. Gevolglik word in die algemeen nog steeds die oortuiging gevind dat die versamelingsleer die basis van die hele wiskunde vorm. Felgner skryf in 1979: “Tans het die versamelingsleer die fondament van die hele wiskunde geword”.[31] Meer onlangs wys ook

31 “Heute ist die Mengenlehre das Fundament für die gesamte Mathematik geworden” (Felgner, 1979:3).

Maddy daarop dat die “opening pages of most recent textbooks” die kontemporêre ortodoksie onderskryf waarvolgens versamelingsleer die grondslag van die wiskunde vorm (Maddy 1997:22):[32] “The view of set theory as a foundation for mathematics emerged early in the thinking of the originators of the theory and is now a pillar of contemporary orthodoxy. As such, it is enshrined in the opening pages textbooks.”

Die opmerking van Boyer oor die gegewe dat die oneindige verband hou beide met getal en kontinuïteit verdien nadere ondersoek: “mathematics, moreover, requires a theory of the infinite in its definitions of number and continuity” (Boyer, 1959:296). Dit kan sekerlik in verband gebring word met Skolem se siening uit die jaar 1922.

> Die versamelingsteoretici meen gewoonlik dat die begrip heelgetal gedefinieer moet word en dat volledige induksie bewys moet word. Dit is egter duidelik dat ’n mens nie tot in die oneindige kan definieer of begrond nie; vroeër of later beland ’n mens by dit wat nie verder gedefinieer kan word nie of dit wat onbewysbaar is. Dan gaan dit daaroor dat die eerste beginaannames onmiddellik duidelik moet wees, dat dit natuurlik en ontwyfelbaar moet wees. Hierdie kondisie word deur die begip heelgetal en induktiewe gevolgtrekkings vervul, maar is beslis nie vervul deur versamelingsteoretiese aksiomas soos dié van Zermelo of soortgelykes nie; indien ’n mens die terugvoering van eersgenoemde begrippe op laasgenoemde wil erken, dan moet die versamelingsteoretiese begrippe eenvoudiger wees en dan moet die denke daarmee meer ontwyfelbaar wees as volledige induksie, maar dit gaan totaal teen die grein van die werklike feitlike toedrag van sake in (Skolem 1979:70; vgl. ook Strauss 2005).[33]

32 Ook Yourgrau merk op: “Even today, the axioms of Zermelo-Fraenkel’s set theory are the most widely used and accepted in the field” (Yourgrau, 2005:72).

33 “Die Mengentheoretiker sind gewöhnlich der Ansicht, dass der Begriff der ganzen Zahl definiert werden soll, und die vollständige Induktion bewiesen werden soll. Es ist aber klar, dass man nicht ins Unendliche definieren oder begründen kann; früher oder später kommt man zu dem nicht weiter Definierbaren bzw. Beweisbaren. Es ist dann nur darum zu tun, dass die ersten Anfangsgründe etwas unmittelbar Klares, Natürliches und Unzweifelhaftes sind. Diese Bedingung ist für den Begriff der ganzen Zahl und die Induktionsschlüsse erfüllt, aber entschieden nicht erfüllt für mengentheoretische Axiome der Zermelo’schen Art oder

Wanneer Fowler enkele jare gelede, na aanleiding van *aritmetisering,* verwys na die "scope of arithmetic [that] has been extended to include informal or formal descriptions of irrational, complex, infinitesimal, and infinite quantities" vermeld hy dat hierdie getalle "then permeate[d] mathematics: in geometry, lines become endowed with a 'length'; the 'area' of a rectangle is the product of the lengths of its base and height, and this basic definition is extended to the area of more and more two-dimensional figures; three-dimensional figures have a numerical 'volume'; then, more recently, higher-dimensional spaces have been created, purely numerical constructs whose properties are then described by geometrical analogies" (Fowler, 1999:8).

Die gebruik van die frase "meetkundige analogieë" sou omgekeer kon word. 'n Mens kan sê dat ruimte-verhoudinge nie sonder "getalsanalogieë" beskryf kan word nie. Die eerste voorbeeld wat Fowler noem betref immers *lengte* en *oppervlakte* – albei *ruimtelike groottes* wat met behulp van *getalle* aangedui word. Dit beteken dat die aard van ('n metriese) ruimte inherent 'n verwysing na getal besit (of: die aard en sin van getal *analogies* weerspieël). Enkele bladsye verder merk hy op dat ons vandag geneig is om ons meetkunde tot getalleleer te omvorm en dan praat hy van vierkante "[that] have been replaced by some abstraction from an arithmetical analogy" (Fowler, 1999). Ook die algemene topologie ontkom nie aan die aanname van onderskeie (d.i. 'n hoeveelheid) punte nie.

Miskien was dit die probleem van Weierstrass in sy statiese interpretasie van 'n veranderlike en beweging. Die kontemporêre wiskundige logika ervaar tewens geen propbleme om van *konstantes* en *veranderlikes* te praat nie. Dit is slegs wanneer ons beweging en verandering in hul oorspronklike kinematiese en fisiese sin sou verstaan dat dit problematies is. Indien hierdie terme egter *analogies* verstaan word is daar ruimte beide vir *ooreenkoms* en *verskil*.

Fowler bevestig egter wat ons hierbo insake die onvermydelike verband tussen oneindigheid en die aard van getal en kontinuïteit

ähnliches; sollte man die Zurückführung der ersteren Begriffe auf die letzteren anerkennen, so müssten die mengentheoretischen Begriffe einfacher sein und das Denken mit ihnen unzweifelhafter als die vollständige Induktion, aber das läuft dem wirklichen Sachverhalt gänzlich zuwider."

uitgelig het: “This recent activity shows a consciousness by mathematicians that the description of the number line [the continuum] and its arithmetic is at the root of our understanding and intuition about mathematics today” (Fowler, 1999:9).

’n Belangrike goue draad wat dus klaarblyk deur die ganse geskiedenis van die wiskunde loop is enersyds gegee in die komplekse aard van die *oneindige* (hetsy in die sin van die *potensieel-oneindige* of in die sin van *oneindige totaliteite* of die *aktueel-oneindige*) en andersyds is dit in die kader van die immer-teenwoordige metgeselle van die oneindige te vinde, naamlik die “aritmetiese” (getal) en die “geometriese” (ruimte). Bernays verkies om hier van *diskreetheid* en *kontinïteit* te praat – vgl. Bernays, 1976:81).[34]

Dit val egter buite die bestek van hierdie ontleding van die geskiedenis van die wiskunde om nader in te gaan op ’n sistematiese verantwoording van die uniekheid en samehang tussen die elemente wat soos ’n goue draad deur die geskiedenis van die wiskunde loop.

Bibliografie

AUGUSTINUS, A. 1931 (1942 – oorspronklik ± 415 n.C.). *De Civitate Dei contra Paganos*, *The City of God*. Vertaal deur John Healy, met ’n *Inleiding* deur Ernest Barker. London: Dent.

BECKER, O. 1957. *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

BECKER, O. 1964. *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. Freiburg: Alber:

BECKER, O. 1965 (Redakteur). *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

BECKER, O. 1965a. Vorwort. In: Becker, 1965 (pp.I-XXI), *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*.

BECKER, O. 1973. *Mathemaische Existenz*, *Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Probleme*. Tübingen: Max Niemeyer Verlag.

BENACERRAF, P. & PUTNAM, H. 1964 (Eds). *Philosophy of Mathematics, Selected Readings.* Oxford: Basil Blackwell.

34 “Es empfiehlt sich, die Unterscheidung von ‘arithmetischer’ und ‘geometrischer’ Anschauung nicht nach den Momenten des Räumlichen und Zeitlichen, sondern im Hinblick auf den Unterschied des Diskreten und Kontinuierlichen vorzunehmen”.

BERNAYS, P. 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wiisenschaftliche Buchgesellschaft

BETH, E. 1965. *Mathematical Thought*. Dordrecht: D. Reidel.

BODEWIG, E. 1932. Die Stellung des hl. Thomas von Aquino zur Mathematik. *Archiv für Geschichte der Philosohie*, Vol. 41.

BOYER, C.B. 1959. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

BOYER, C.B. 1991. *A History of Mathematics*, Hersiene uitgawe deur Uta C. Merzbach. New York: Wiley.

BROUWER, L.E.J. 1907. Over de Grondslagen der Wiskunde. Leipzig: Maas en van Suchtelen.

BROUWER, L.E.J. 1964. Consciousness, Philosophy, and Mathematics. In: Benacerraf *et.al., Philosophy of Mathematics, Selected Readings* 1964, pp.78-84.

CANTOR, G. 1962. *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts* (1932). Hildesheim: Oldenburg Verlag.

CASSIRER, E. 1910. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. (Berlin), Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft (1969).

DEDEKIND, R. 1872. *Stetigkeit und Irrationale Zahlen* (7de druk), saam met *Was sind und was sollen die Zahlen* (1887 – 10de druk) opgeneem in die gesamentlike uitgawe van Friedrich Vieweg & Sohn, Bruanschweig (2de onveranderde druk) 1969.

DEDEKIND, R. 1887. *Was sind und was sollen die Zahlen*. Friedrich Vieweg & Sohn, Bruanschweig (2de onveranderde druk) 1969.

FELGNER, U. (Editor) 1979. *Mengenlehre*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

FOWLER, D. 1999. *The Mathematics of Plato's Academy*. 2nd ed. Oxford: Clarendon

FRAENKEL, A. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*, 3de uitgebreide druk, Berlyn: Springer.

FRAENKEL, A. 1930. Das Problem des Unendlichen in der neueren Mathematik. *Blätter für deutsche Philosophie,* 4: 279-297.

FRAENKEL, A., BAR-HILLEL, Y., LEVY, A. & VAN DALEN, D. 1973. *Foundations of Set Theory*, 2nd revised ed. Amsterdam: North Holland.

FREGE, G. 1903: *Grundgesetze der Arithmetik*, Vol.II. Jena: Verlag Hermann Pohle.

FREGE, G. 1979. *Posthumous Writings*. Oxford: Basil Blackwell.

GRÜNFELD, J. 1983. Euclidean Nostalgia. In: *International Logic Review*, June, 27 pp.41-50.

GOSZTONYI, A. 1976. *Der Raum*; *Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften*. Freiburg: Alber (Vols. 1&2).

HEIMSOETH, H. 1922. *Die sechs großen Themen der abendländischen Metaphysik und der Ausgang des Mittelalters*, Berlin: Stilke, ('n

Oordruk van die onveranderde derde druk het by die *Wissenschaftliche Buchgesellschaft* verskyn, Darmstadt 1987).

HEINE, E. 1872: Die Elemente der Functionenlehre. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Band 74 (172-188), Berlyn.

HERSH, R. 1997. *What is Mathematics Really*? Oxford: Oxford University Press.

HEYTING, A. 1948. *Spanningen in de Wiskunde*. Groningen: P. Noordhoff.

HEYTING, A. 1971. *Intuitionism*, *An Introduction*. 3rd revised ed. Amsterdam: North-Holland.

HILBERT, D. 1925. Über das Unendliche. In: *Mathematische Annalen*, 1925(95):161-190.

HOFSTADTER, D.R. 1980. *Gödel*, *Escher*, *Bach*: *An eternal golden braid*, *A metaphorical Fugue on minds and machines in the spirit of Lewis Carroll*. New York: Penguin Books.

HUSSERL, E. 1979. *Aufsätze und Rezensionen* (1890–1910), *Husserliana, Edmund Husserl, Gesammelte Werke*, Volume XXII. Den Haag: Martinus Nijhoff.

KANT, I. 1783. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können*. Hamburg: Felix Meiner edition (1969).

KLINE, M. 1980. *Mathematics, The Loss of Certainty*. New York: Oxford University Press.

LAKOFF, G. & NÚÑEZ, R.E. 2000. *Where Mathematics Comes From*, *How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

LAUGWITZ, D. 1986. *Zahlen und Kontinuum*. *Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik*. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag.

LINDEMANN, F. 1882. Über die Zahl. *Mathematische Annalen*, 20: 213–225.

LONGO, G. 2001. The Mathematical Continuum: From Intuition to Logic. ftp://ftp.di.ens.fr/pub/users/longo/PhilosophyAndCognition/the-continuum.pdf_(19 Oktober 2010).

LORENZEN, P. 1960. *Die Enstehung der exakten Wissenschaften*. Berlin: Springer.

LORENZEN, P. 1972. Das Aktual-Unendliche in der Mathematik, uit *Methodisches Denken*, opgeneem in Meschkowski, 1972 (pp.157-165).

MADDY, P. 1997. *Naturalism in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

MAIMON, S. 1790. *Versuch über die Transzendentalphilosophie, mit einem Anhang uber die symbolische Erkenntnis und Anmerkungen*. Berlyn (onveranderde herdruk deur die Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972). ['n Engelse vertaling het in 2010 verskyn: Maimon, Salomon. *Essay on transcendental philosophy*. Translated by Nick Midgley, Henry Somers-Hall, Alistair Welchman,

and Merten Reglitz, London, New York: Continuum International Publishing Group.]
MESCHKOWSKI, H. 1972. *Probleme des Unendlichen*, *Werk und Leben Georg Cantors*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.
MESCHKOWSKI, H. 1972. *Grundlagen der modernen Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
MÜHLENBERG, E. 1966. *Die Unendlichkeit Gottes bei Gregor von Nyssa*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
REID, C. 1970. *Hilbert*, *With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl*. New York: George Allen & Unwin.
REIDEMEISTER, K. 1949. *Das exakte Denken der Griechen*. *Beiträge zur Deutung von Euklid*, *Plato und Aristoteles*. Hamburg: Reihe Libelli, 333.
RIEDWEG, C. 2005. *Pythagoras*: *His Life*, *Teaching*, *and Influence*. Ithaca: Cornell University Press.
POINCARÉ, H. 1902. Du role de l'intuition et de la logique en mathematiques. *C.R. du Iime Congress Intern. des Math.*, Paris 1900:200-202.
POINCARÉ, H. 1910. *Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik*, Fünfter Vortrag: Über transfinite Zahlen. Leibzig und Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner.
RUSSELL, B. 1956. *The Principles of Mathematics*. London: George Allen & Unwin. (First published in 1903, 2nd ed. 1937, 7th ed. 1956).
SHAPIRO, S. 2005 (Editor). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.
STRAUSS, D.F.M. 1991. The Ontological Status of the principle of the excluded middle. In: *Philosophia Mathematica II,* 6(1):73-90.
STRAUSS, D.F.M. 2005. *Paradigmen in Mathematik*, *Physik und Biologie und ihre philosophische Wurzeln*. Frankfurt am Main: Peter Lang.
STRAUSS, D.F.M. 2011. Ooraftelbaarheid – Hoe eksak is die wiskunde? *Koers*, 76(4) 2011.
STEGMÜLLER, W. 1970. *Main Currents in Contemporary German*, *British and American Philosophy*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, Holland.
SZABÓ, A. 1965. Anfänge des euklidischen Axiomensystems. In: Becker, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. 355-461.
TAIT, W. 2005. *The Provenance of Pure Reason*, *Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History*. Oxford: University Press.
VON FRITZ, K. 1945. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum, *Annals of Mathematics*, 46:242-264. Opgeneem in: Becker, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. 271-307.
WANG, Hao 1988. *Reflections on Gödel*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

WEYL, H. 1919. De circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis. *Jahresbericht der deutsche mathematische Verein*, Vol. 28:85-92.
WEYL, H. 1921. Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik, *Mathematische Zeitschrift*, Volume 10:39-79.
WEYL, H. 1931. *Die Stufen des Unendlichen*. Voordrag gehou op 27 Oktober by die opening van die Gastedag van die Wiskunde Vereniging aan die Universiteit in Abbeanum, Jena.
WEYL, H. 1946. Mathematics and Logic. *American Mathematical Monthly*, Vol. 53:1-13.
WEYL, H. 1951. A Half-Century of Mathematics. In: *American Mathematical Monthly*, 58:523-553.
WEYL, H. 1966. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 3de hersiene en uitgebreide druk. Vienna: R. Oldenburg.
WEYL, H. 1970. David Hilbert and His Mathematical Work. In: Reid C., *Hilbert*, *With an appreciation of Hilbert’s mathematical work by Hermann Weyl*. 243-285.
YOURGRAU, P. 2005. *A World Without Time*. *The forgotten Legacy of Gödel and Einstein*. London: Penguin Books.
ZERMELO, E. 1904. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1, *Mathematische Annalen*, 59:514-516.
ZERMELO. E. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der MengenlehreI. *Mathematische Annalen,* 65:261-281